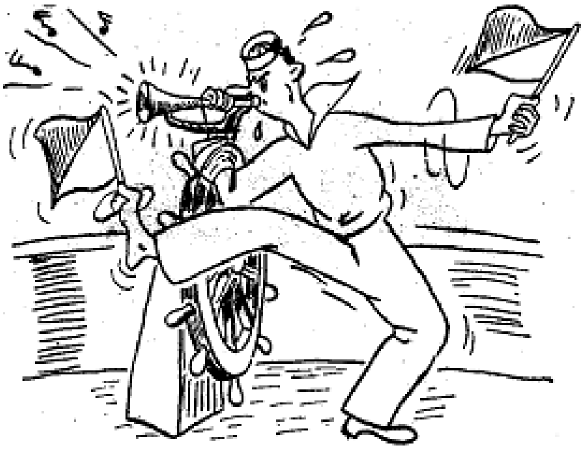


RESUMO DE MATEMÁTICA

SUMÁRIO

3 UNIDADES

Agrárias

$Ha\ (hectare) = Hm^2\ (hectômetro\ quadrado)$
$a(are) = Dm^2\ (decâmetro\ quadrado)$
$ca\ (centiare) = m^2\ (metro\ quadrado)$

Inglesas

$1\ milha = 1852m\ (milha\ náutica)$
$1\ milha = 1609m\ (milha\ terrestre)$
$nudo = milha/hora$

Distância	
Jarda	3 pés
pé	12 polegadas
pé	305 mm
Superfície	
pé^2	9,3 dm^2
acre	4046 m^2
Peso	
libra	454 g
Capacidade	
galão	4,54 litros

4 EQUIVALÊNCIAS NO SISTEMA MÉTRICO

CAPACIDADE	MASSA	VOLUME
Kl	Tm	m^3
Hl	Qm	
Dl	Mg	
l	Kg	dm^3
dl	Hg	
cl	Dg	
ml	g	cm^2
	dg	
	cg	
	mg	mm^2

5 CLASSIFICAÇÃO DOS NÚMEROS

$$Reais \begin{cases} Racionais \begin{cases} Inteiros \begin{cases} Positivos \begin{cases} Naturais \\ Zero \end{cases} \\ Negativos \end{cases} \\ Fracionários \begin{cases} Positivos \\ Negativos \end{cases} \end{cases} \\ Irracionais \end{cases}$$

6 ELEMENTOS DE UMA DIVISÃO

$D = dq_f + R_f$	$d = R_f + R_e$

$D = dq_e - R_e$	$q_e - q_f = 1$

$D = dividendo$
$q_f = Quociente\ por\ falta$
$R_f = Resto\ por\ falta$
$d = Divisor$
$q_e = Quociente\ por\ excesso$
$R_e = Resto\ por\ excesso$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 6 \end{array}$$

$6 = quociente\ por\ falta$

$2 = resto\ por\ falta$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \cline{2-2} -1 & 7 \end{array}$$

$7 = quociente\ por\ excesso$

$1 = resto\ por\ excesso$

7 DIVISÃO PROPORCIONAL

a) Dividir N em partes diretamente proporcionais a a, b, c:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{N}{a+b+c}$$

b) Dividir N em partes inversamente proporcionaisa a, b, c:

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{Nabc}{ab+ac+bc}$$

8 CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS LINEARES

$$Sistemas \begin{cases} \underset{(c/solução)}{Compatíveis} \begin{cases} determinados - solução\ única \\ indeterminados - infinitas\ soluções \end{cases} \\ \underset{(s/solução)}{Incompatíveis} \end{cases}$$

Dado o sistema: $\begin{cases} Ax + By = C \\ A'x + B'y = C' \end{cases}$

Se $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \Longrightarrow compatível\ determinado - duas\ retas\ que\ se\ cortam.$

Se $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \Longrightarrow compatível\ indeterminado - duas\ retas\ coincidentes.$

Se $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \Longrightarrow incompatíveis - duas\ retas\ paralelas.$

9 ARITMÉTICA COMERCIAL

$j = juros$ $\quad C = capital$ $\quad i = taxa$ $\quad d = desconto$ $\quad M = montante$

$N = valor\ noinal\ do\ título\ a\ ser\ pago$ $\quad E = valor\ atual$

$d = \frac{N.i.t}{100}$ $\quad E = N - d \quad M = C.(1 + it)$

$M = C + j$

10 PROPORÇÕES

Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \longrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+b+c}{a'+b'+c'}$

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow \begin{matrix} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}; \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \\ \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}; \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \end{matrix}$

$(a', b' e\ c' \neq 0 \quad e \quad b, d \neq 0)$

Propriedade fundamental: - Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longrightarrow ad = cb$

11 FRAÇÕES GERATRIZES

Decimal exata: $\mathrm{a, bc} = \frac{\mathrm{abc}}{100}$ (tantos zeros quanto as casas decimais)

Periódica pura: $a, \widehat{bc} = \frac{abc - a}{99}$ (tantos noves quanto as casas decimais)

Periódica mista: $a, b\widehat{cd} = \frac{abcd - ab}{990}$ (tantos noves quanto o número de casa do período e tantos zeros quanto o número de casas do anteperíodo - $\widehat{cd} = período, b = anteperíodo$)

12 IDENTIDADES NOTÁVEIS

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

13 MÉDIAS

Média aritmética:

$$\frac{a + b + c + \cdots + n}{N}$$

N= tantos números quantas forem as parcelas da soma.

Média Geométrica:

$$\sqrt[m]{a.b.c.\dots.n}$$

m=número de termos.

14 SISTEMAS E EQUAÇÕES LINEARES

$$\left.\begin{array}{r} Ax + By = C \\ A'x + B'y = C' \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = \dfrac{C - By}{A} \\ x = \dfrac{C' - B'y}{A'} \end{array} \qquad \frac{C - By}{A} = \frac{C' - B'y}{A'} \{equação\ do\ 1º\ grau$$

15 EQUAÇÃO DO 2º GRAU

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + bx = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{c} x(ax + b) = 0 \\ x_1 = 0 \\ ax + b = 0 \end{array}\right.$$

$$ax^2 + c = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{-\dfrac{c}{a}} \\ x_2 = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}} \end{array}\right.$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad ; \quad P = x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

$$D = x_1 - x_2$$

- <u>Formação da equação:</u> $x^2 - Sx + P = 0$
  $x^2 + Dx - P = 0$
- <u>Discussão das raízes:</u> $\Delta = b^2 - 4ac \to Discriminante.$
- Se $b^2 - 4ac > 0 \to x_1 \neq x_2$ $\quad as\ raízes\ são\ distintas.$
- Se $b^2 - 4ac = 0 \to x_1 = x_2$ $\quad a\ raíz\ é\ dupla.$
- Se $b^2 - 4ac < 0 \to x_1\ e\ x_2$ $\quad raízes\ indeterminadas\ em\ \mathbb{R}, são\ imaginárias.$

16 EQUAÇÕES IRRACIONAIS

A resolução de uma equação irracional deve ser efetuada procurando transformá-la inicialmente numa equação racional, obtida ao elevarmos ambos os membros da equação a uma potência conveniente.

Em seguida, resolvemos a equação racional encontrada e, finalmente, verificamos se as raízes da equação racional obtidas podem ou não ser aceitas como raízes da equação irracional dada (verificar a igualdade).

É necessária essa verificação, pois, ao elevarmos os dois membros de uma equação a uma potência, podem aparecer na equação obtida raízes estranhas à equação dada.

17 TRINÔMIO DO 2º GRAU

$y = ax^2 + bx + c$ (sua representação gráfica é uma parábola)

- Interseção com o eixo $x \begin{cases} P_1(x_1; 0) \\ P_2(x_2; 0) \end{cases}$ $\{x_1\ e\ x_2$ são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$
- Interseção com o eixo y $P_3(0; c)$ $\quad c$= termo independente.
- Vértice $\begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$ Vértice é o ponto onde a parábola faz a volta.
- Se $a > 0$ O vértice é o ponto mais baixo e a concavidade está voltada para cima (ponto de mínimo).

- Se $a < 0$ O vértice é o ponto mais alto e a concavidade está voltada para baixo (ponto de máximo).

18 RADICAIS

$\sqrt[n]{a} = b \Longrightarrow b^n = a$

- Soma: $3\sqrt[n]{a} + 5\sqrt[n]{a} = (3+5)\sqrt[n]{a} = 8\sqrt[n]{a}$
- Potência: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$
- Produto: $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
- Raíz: $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n.p]{a}$
- Quociente: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- Extração: $\sqrt[n]{a^n.b} = a\sqrt[n]{b}$
- Racionalização:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \times \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}$$

$\sqrt{b}-\sqrt{c}$ chama-se binômio conjugado de $\sqrt{b}+\sqrt{c}$

19 POTÊNCIAS

- $a^n = a.a.a.a.\ldots.a\ (n\ vezes)$
- Soma: $3a^n + 5a^n = (3+5)a^n = 8a^n$
- Produto: $a^n.a^p = a^{(n+p)}$
- Quociente: $a^n : a^p = a^{n-p}$
- Potência:

$$(a^n)^p = a^{n.p}$$
$$a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^n}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$
$$(a.b.c)^n = a^n.b^n.c^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

20 DECOMPOSIÇÃO DE UM POLINÔMIO EM FATORES

$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.x + a_n$

Sendo $x_1, x_2, x_3 \ldots\ x_n$ as raízes que podem ser obtidas pela regra de *Ruffini*.

$$y = a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)$$

Caso particular - $y = ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$

21 ANÁLISE COMBINATÓRIA

21.1 Permutações

Duas sequências distintas se diferenciam pela ordem de colocação.

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$

$n!$ Se lê n fatorial.

$$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1$$

21.2 Arranjos

As sequências distintas se diferenciam por algum elemento ou pela ordem de colocação. (ordem e natureza)

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1) - n \quad fatores$$

$$A_{10}^7 = 10.9.8.7.6.5.4$$

21.3 Combinações

As ordenadas distintas se diferenciam por algum elemento. A ordem de colocação é indiferente.

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}$$

$\binom{m}{n}$ se lê m sobre n

$$0! = 1$$

21.4 Permutações circulares

Maneiras de colocar n elementos em um círculo.

$$P_c n = (n-1)!$$

21.5 Fórmulas importantes

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} \text{ ou seja } \binom{10}{8} = \binom{10}{2}$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

21.6 Fórmula de newton

$$(a+x)^n = \binom{m}{0}x^m + \binom{m}{1}x^{m-1} + \binom{m}{2}x^{m-2} + \dots + \binom{m}{m-1}xa^{m-1} + \binom{m}{m}a^m$$

22 PROGRESSÕES

22.1 Progressões aritméticas

A diferença entre um termo qualquer e seu anterior é constante. (r)

$$a_1; a_2; \dots a_n$$

$$a_n = a_1(n-1)r$$

$$a_1 = a_n - (n-1)r$$

$$r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}.n$$

$$S = a_c.n$$

$$a_c = termo\ central$$

A soma dos termos equidistantes dos extremos é constante.

Interpolação:

Para interpolar p números entre a e b.

$$d = \frac{b-a}{p+1} = (razão\ de\ interpolação)$$

22.2 Progressões geométricas

O quociente entre um termo qualquer e seu anterior é constante. (q)

$$a_1; a_2; \dots a_n$$

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

$$a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}$$

$$S = a_1\frac{q^n - 1}{q-1}$$

$$P = \sqrt{(a_1 . a_n)^n}$$
$$P = \sqrt{(a_c)^n}$$
$$n = \frac{loga_n - loga_1}{2} + 1$$

O quociente dos termos equidistantes dos extremos é constante.

Se q $(razão)$ é menor que 1 a soma tem infinitos elementos e vale: $S = \frac{a_1}{1-q}$

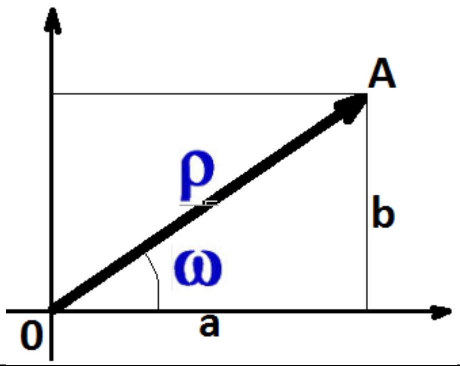
Para interpolar p números entre a e b: $q = \sqrt[p+1]{\frac{b}{a}}$

23 OPERAÇÕES NA FORMA BINÔMICA (NÚMEROS COMPLEXOS)

- Soma: $(a + bi) + (c + di) = [(a + c) + (b + d)i]$
- Produto: $(a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$
- Quociente: $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} . \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$
- Potência: $(a + bi)^n$ se resolve por ***Newton***.

$i^2 = -1$ $i = \sqrt{-1}$	$i^2 = -1$	$i^3 = 1$	$i^4 = +1$

24 NÚMEROS COMPLEXOS



- $Z = \rho\omega$ (forma polar)
- $Z = a + bi$ (forma binômica)
- $Z = \rho(cos\omega + isen\omega)$ (forma trigonométrica)
- *o ponto* A se chama ***afixo***.
- *módulo* $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$
- *argumento* ω: $tg\omega = \frac{b}{a}$

25 OPERAÇÕES NA FORMA TRIGONOMÉTRICA

- Soma: se faz sempre na forma binômica

$$Z_1 = \rho(cos\omega + isen\omega)$$
$$Z_2 = \rho'(cos\omega' + isen\omega')$$

- Produto:

$$Z_1 . Z_2 = \rho\rho'[cos(\omega + \omega') + isen(\omega + \omega')]$$

- Quociente:

$$\frac{Z_1}{Z_{2_1}} = \frac{\rho}{\rho'}[cos(\omega - \omega') + isen(\omega - \omega')]$$

- Potência:

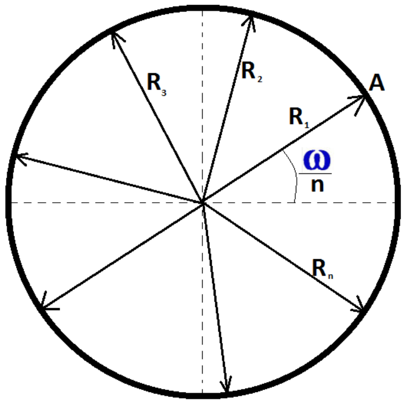
$$Z^n = \rho^n[cosn\omega + isenn\omega]$$

26 RAIZ DE UM COMPLEXO

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\frac{2k\pi + \omega}{n} + isen\frac{2k\pi + \omega}{n}\right]$$

<table>
<tr>
<td>

<u>Representação gráfica das raízes</u>



</td>
<td>

Para $K = 0$;

$$R_1 = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\frac{\omega}{n} + isen\frac{\omega}{n}\right]$$

Desenha-se o ângulo $\frac{\omega}{n}$. Divide-se a circunferência em n partes que se desenham a partir de A.

$$r = \sqrt[n]{\rho}$$

</td>
</tr>
</table>

27 LOGARÍTMOS

$$log_a B = x \rightarrow a^x = B$$
$$loga.b = loga + logb$$
$$log\frac{a}{b} = loga - logb$$
$$loga^n = nloga$$
$$log\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}loga$$
$$cologa = log\frac{1}{a} = -loga$$
$$log1 = 0$$
$$log0 = -\infty$$

<u>Mudança de base</u>: $log_a B = \frac{log_c B}{log_c a}$

Logaritmo neperiano (L) é o logaritmo no sistema de base e.

$$e = lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$log20 = 1{,}301030$$
$$1 = característica$$
$$301030 = mantissa$$

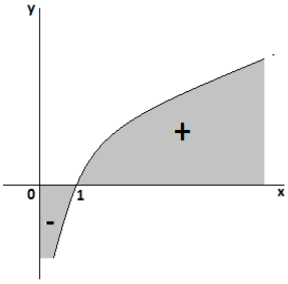
Se o número tem n cifras sua característica será $n - 1$. Quando no logaritmo não vem expressa a base se supõe $log_{10}(base\ 10)$.

27.1 Propriedades operatórias

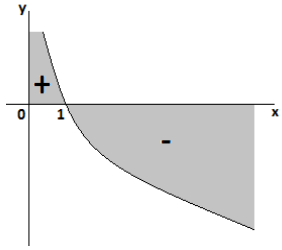
- $log_a A.B = log_a A + log_a B$
- $log_a \frac{A}{B} = log_a A - log_a B$
- $log_a A^m = m.log_a A$
- $log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}log_a A$

27.2 Gráficos da função logaritmo

$$a > 1\begin{cases} x > 1 \Leftrightarrow log_a x > 0 \\ 0 < x < 1 \Leftrightarrow log_a x < 0 \end{cases}$$

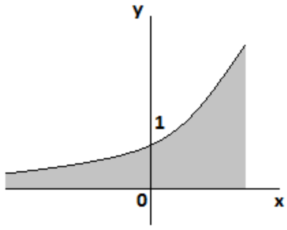


$$0 < a < 1\begin{cases} 0 < x < 1 \Leftrightarrow log_a x > 0 \\ x > 1 \Leftrightarrow log_a x < 0 \end{cases}$$



27.3 Exponenciais

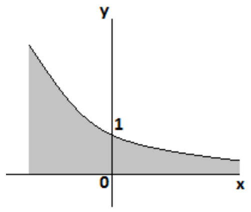
$f: x \to a^x$ ou $y = a^x$



$a > 1, x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

Função crescente

a real e $a > 0$ e $a \neq 1$

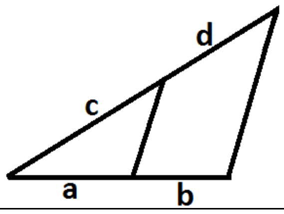


$0 < a < 1, x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

Função decrescente

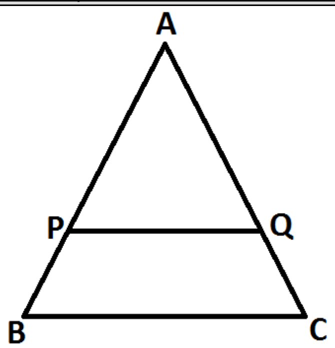
28 GEOMETRIA ELEMENTAR

28.1 Teorema de tales



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

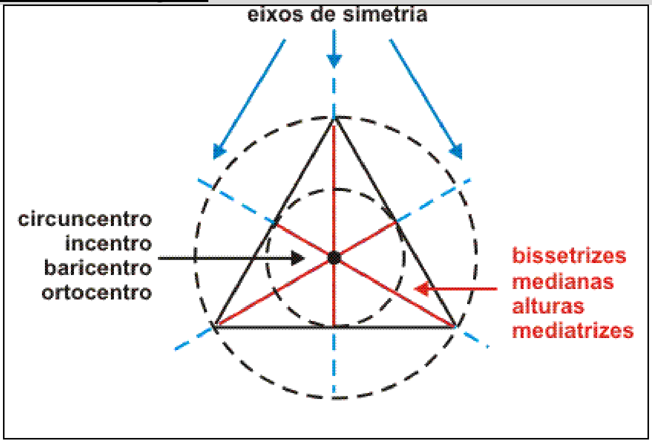
28.2 Segmento paralelo a um lado de um triângulo



$$\Delta ABC \sim \Delta APQ$$

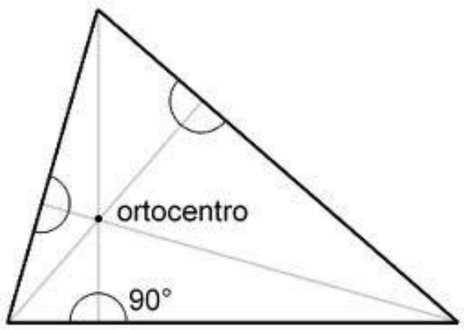
$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} = \frac{BC}{PQ}$$

28.3 Pontos e propriedades de um triângulo



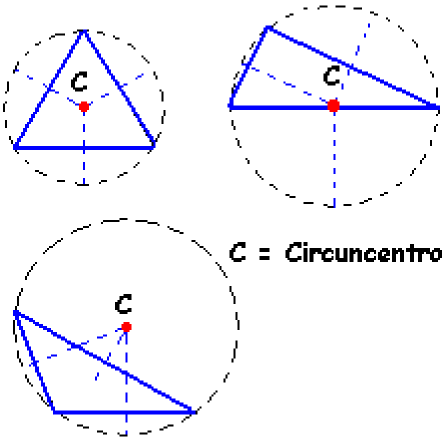
ORTOCENTRO

Interseção das alturas.



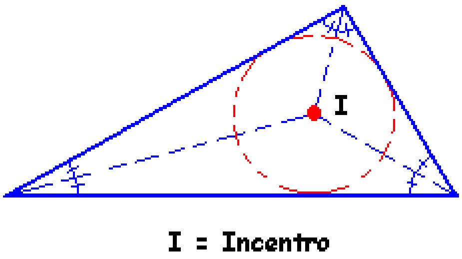
CIRCUNCENTRO

Interseção das mediatrizes - Centro da circunferência circunscrita



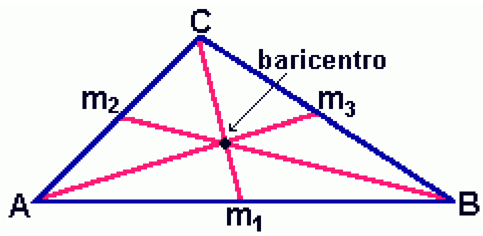
INCENTRO

Interseção das bissetrizes – Centro da circunferência inscrita.



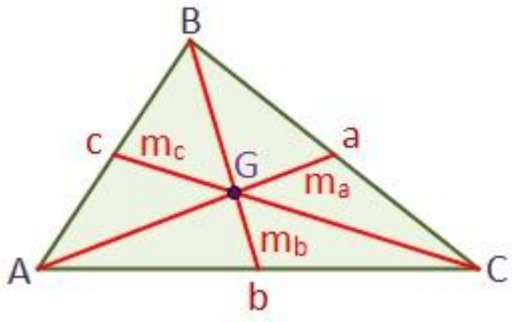
BARICENTRO

Interseção das medianas. Dista $\frac{1}{3}$ do vértice e $\frac{2}{3}$ do lado.



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o$$
$$a + b + c = 2p$$

Medianas

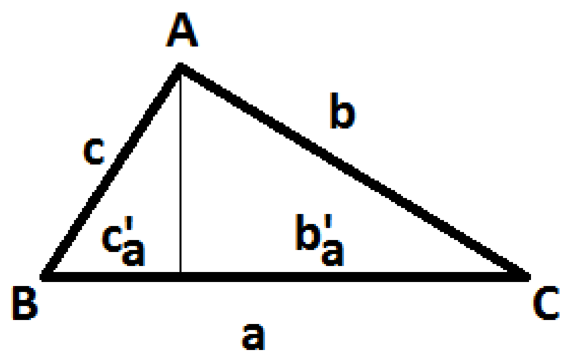


$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

28.4 Triângulos oblíquos



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac(cosB)$$

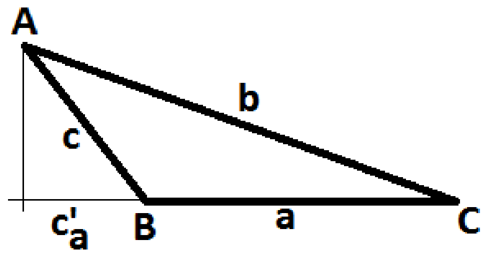
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac'_a$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ca'_c$$

c'_a= projeção de c sobre a.

a'_c= projeção de a sobre c.

Da mesma forma para os demais lados.



$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac.cos(180 - B)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac'_a$$

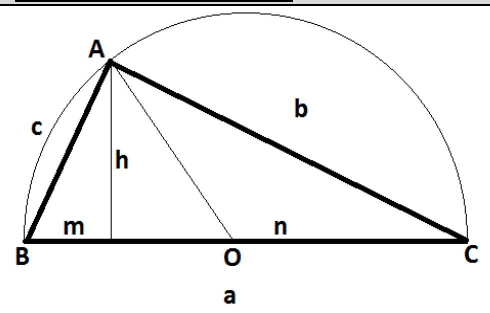
$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ca'_c$$

c'_a= projeção de c sobre a.

a'_c= projeção de a sobre c.

Da mesma forma para os demais lados.

28.5 Triângulos retângulos



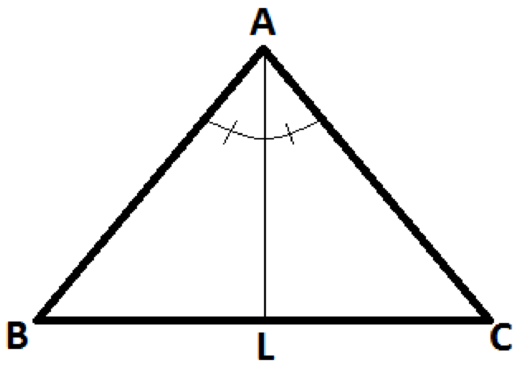
Catetos: $b^2 = a.n$
Altura: $h^2 = m.n$
Área: $S = \frac{b.c}{2} = \frac{a.h}{2}$

Teorema de ***Pitágoras***: $a^2 + b^2 = c^2$

AO= mediana sobre a = Raio = $\frac{a}{2}$

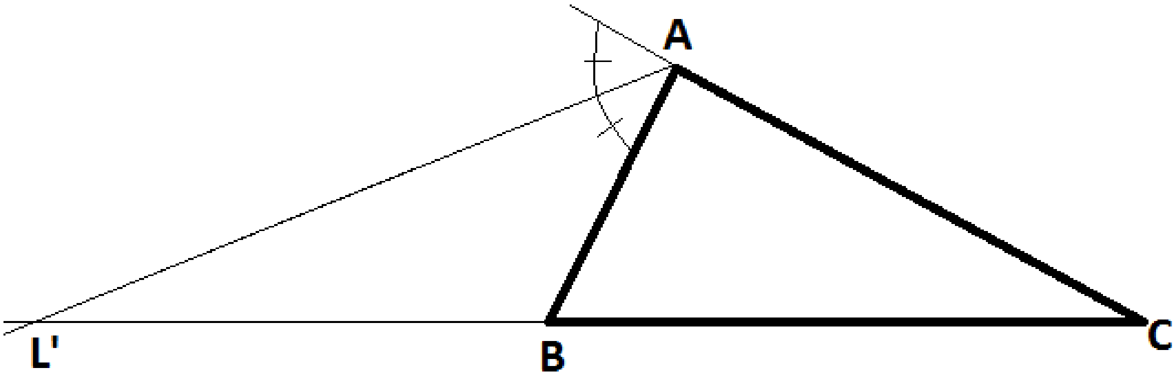
28.6 Teorema das bissetrizes

Interna:



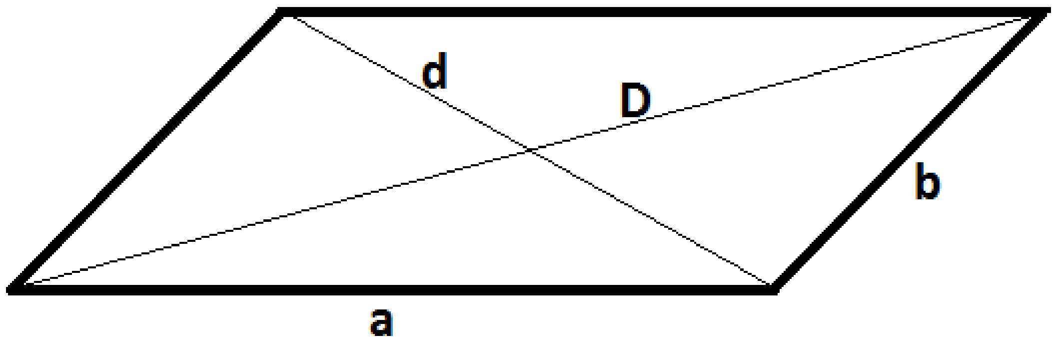
$$\frac{AB}{AC} = \frac{LB}{LC}$$

Externa:



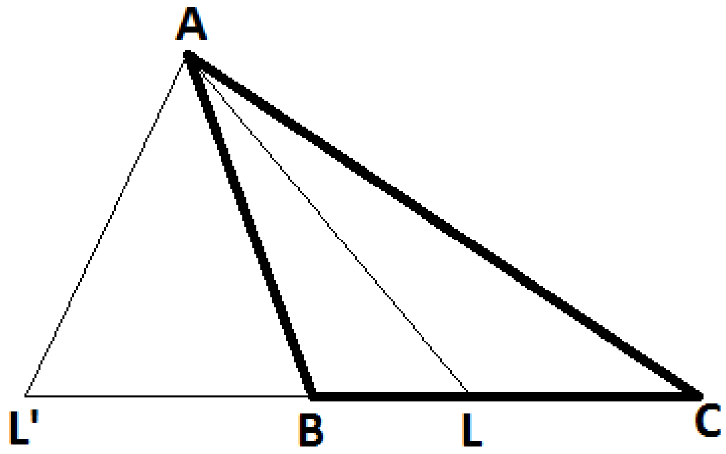
$$\frac{AB}{AC} = \frac{L'B}{L'C}$$

28.7 Diagonal de um paralelogramo



$$D = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - d^2}$$

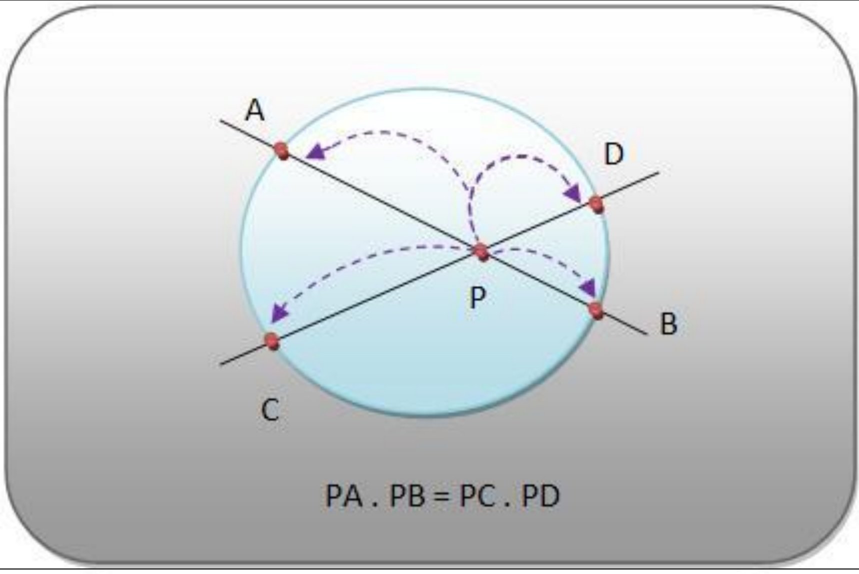
28.8 Quarta harmônica

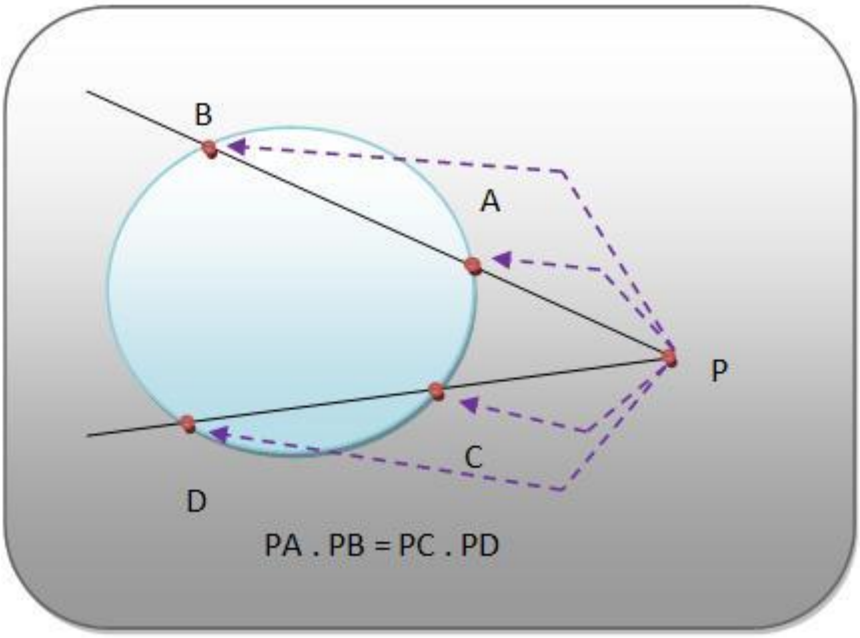


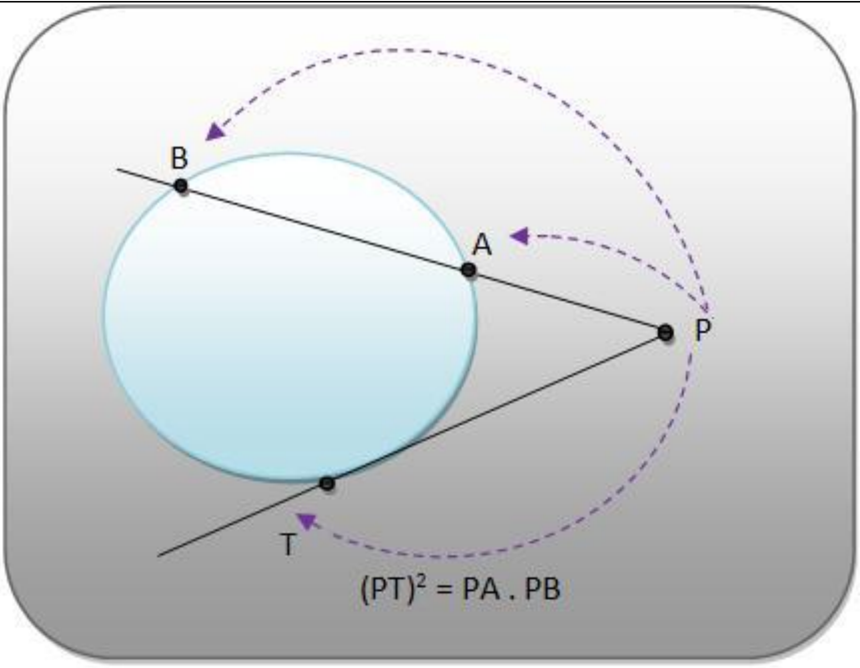
Quatro pontos em uma reta

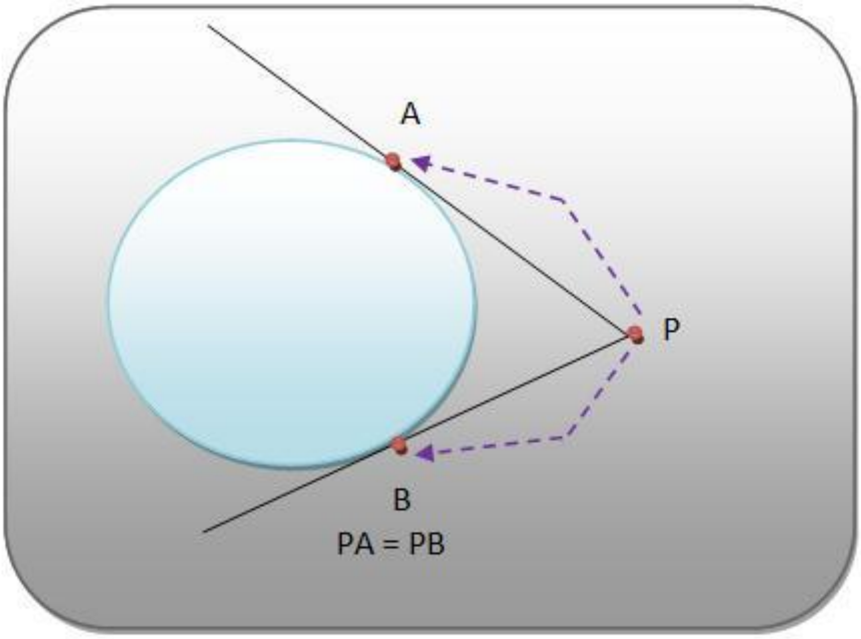
$$\frac{BL}{CL} = \frac{BL'}{CL'}$$

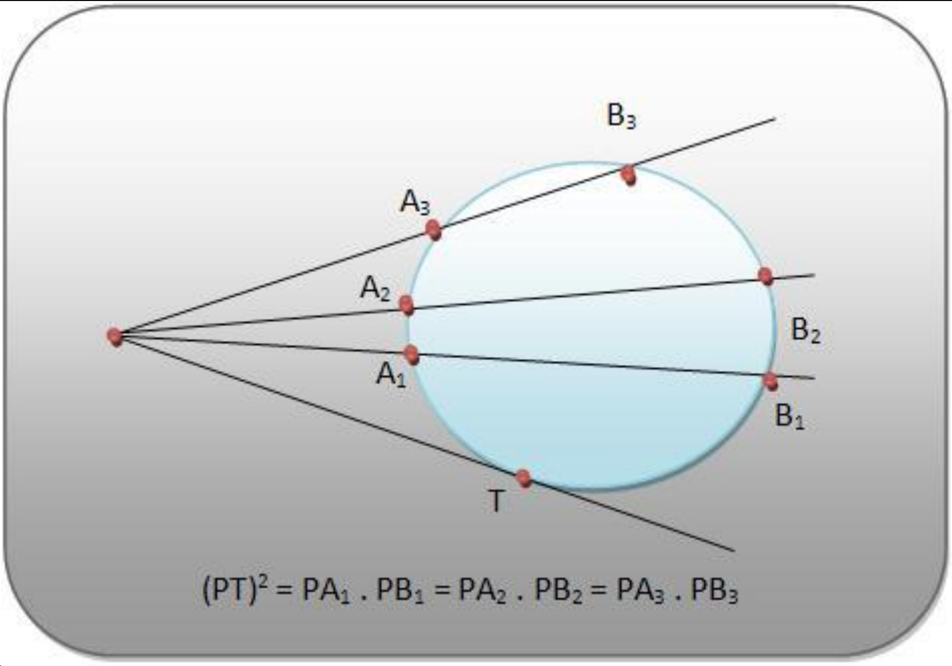
28.9 Potência de um ponto (P)





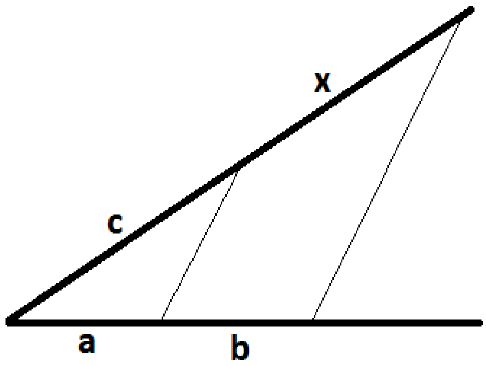

B
A
P
T
(PT)² = PA . PB


A
P
B
PA = PB



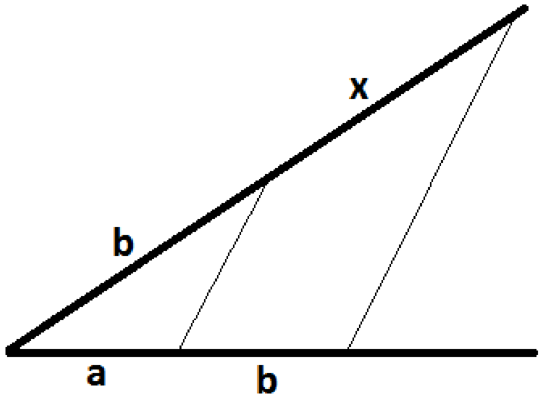
28.10 Construções

Quarta proporcional



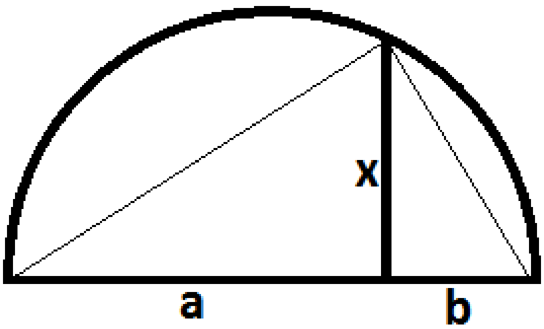
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Terceira proporcional



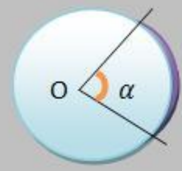
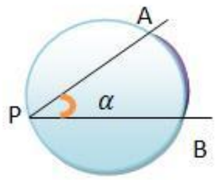
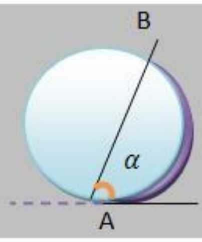
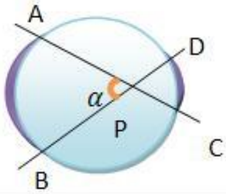
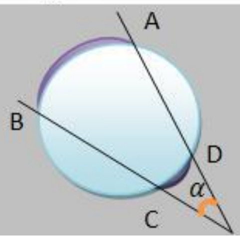
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Média proporcional

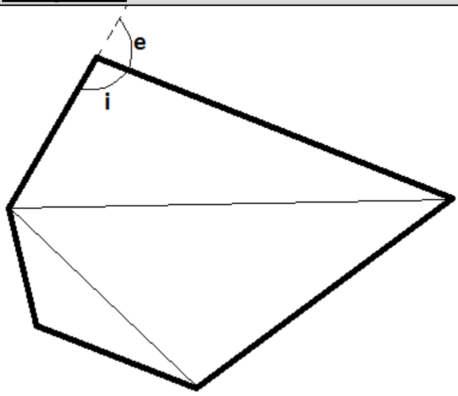


$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

28.11 Ângulos na circunferência

Ângulo	Vértice e Lados	Figura	Medida
Central	Vértice no centro da circunferência		α = AB
Inscrito	Vértice na circunferência e lados secantes		$\alpha = \frac{AB}{2}$
Ângulo de segmento	Vértice na circunferência e um lado secante e o outro tangente a circunferência		$\alpha = \frac{AB}{2}$
Excêntrico interior	Vértice na região interior da circunferência		$\alpha = \frac{AB + CD}{2}$
Excêntrico exterior	Vértice na região exterior e lados secantes ou tangentes à circunferência		$\alpha = \frac{AB - CD}{2}$

28.12 Polígonos

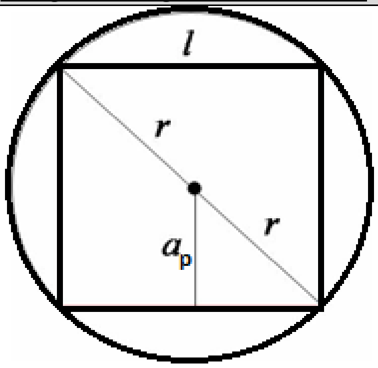
	Soma de todos os ângulos: $2n\ retos$ Soma dos ângulos internos: $S_i = (2n - 4)\ retos$. $S_i = (n-2).180^o$ Soma dos ângulos externos: $S_e = 4\ retos$ $S_e = 360^o$

Polígonos regulares

- $i = \frac{n-2}{n}.180^o$ (ângulo interno)

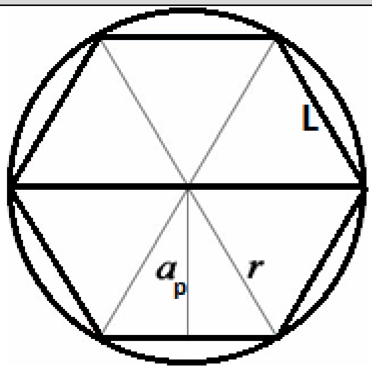
- $e = \frac{360^o}{n}$ (ângulo externo)
- $D = \frac{n(n-3)}{2}$ (nº de diagonais)

28.13 Polígonos regulares inscritos



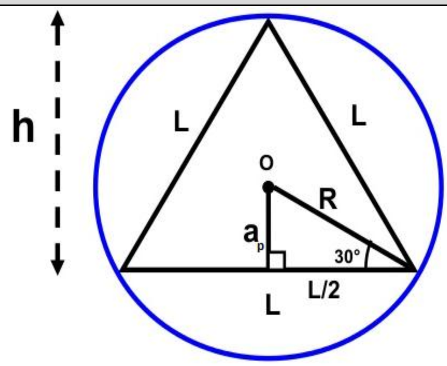
$l = r\sqrt{2}$

$a_p = \frac{r\sqrt{2}}{2}$



$l = r$

$a_p = \frac{r\sqrt{3}}{2}$



$l = r\sqrt{3}$

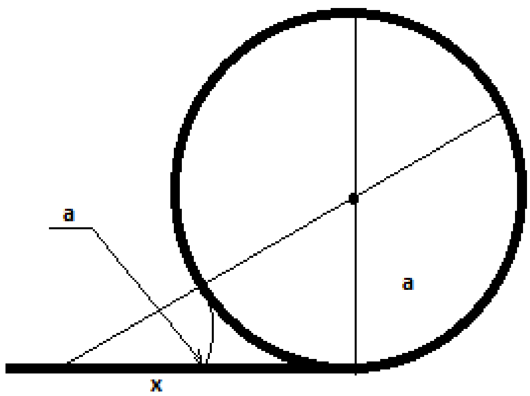
$a_p = \frac{R}{2}$

28.14 Seção áurea de um segmento

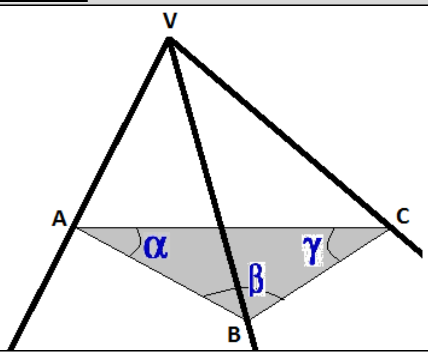
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

$$x = a.\frac{\sqrt{a}-1}{2}$$

$$x = seção\ áurea$$



28.15 Triedros



Faces: $\widehat{BVA};\ \widehat{BVC}; \widehat{CVA}$

Diedros: α, β, γ

Soma das faces < 4 retos.
Cada face é maior que a diferença das outras duas e menor que a soma.

28.16 Poliedros

Nome	Nº faces	Forma das faces	Nº de arestas	Nº de vértices	Dos vértices partem
Tetraedro	4	Triângulos equiláteros	6	4	3 arestas
Hexaedro	6	Quadrados	12	8	3 arestas
Octaedro	8	Triângulos equiláteros	12	6	4 arestas
Dodecaedro	12	Pentágono regular	30	20	3 arestas

Icosaedro	20	Triângulos equiláteros	30	12	5 arestas

Em um poliedro: nº de faces + nº de vértices = nº de arestas +2 $(F + V = A + 2)$

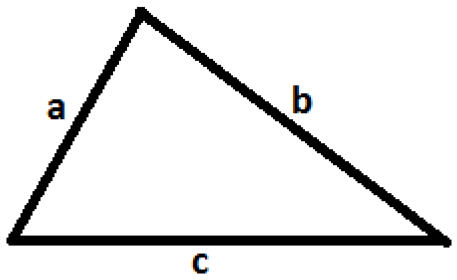
28.17 Lugares geométricos

- **Lugar geométrico** – É um conjunto de pontos que tem uma determinada propriedade, de tal maneira que um ponto que não pertença a este lugar não tem a propriedade.
- **Circunferência** – Lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de um outro interior chamado centro.
- **Esfera** – Lugar geométrico dos pontos do espaço que equidistam de um outro chamado centro.
- **Elípse** – Lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante.
- **Hipérbole** – Lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante.
- **Parábola** – Lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de um ponto e de uma reta.
- **Mediatriz** – Lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos extremos de um segmento.
- **Bissetriz** – Lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos lados de um ângulo.

29 ÁREAS E VOLUMES

29.1 Áreas e volumes (Corpos no plano)

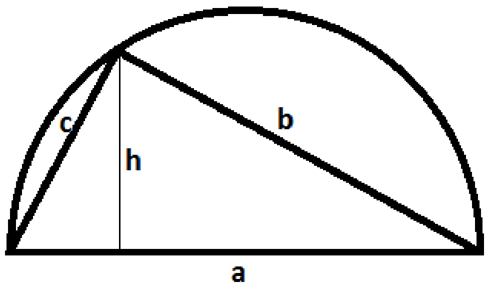
Triângulo qualquer



$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

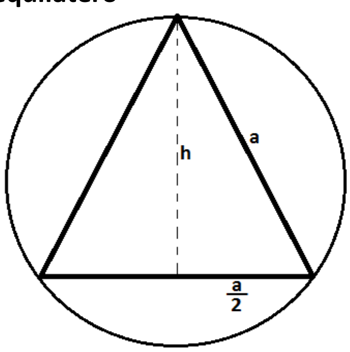
$$S = \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}$$

Triângulo retângulo



$$s = \frac{a.h}{2} = \frac{b.c}{2}$$

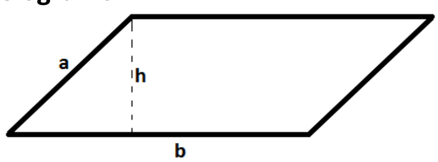
Triângulo equilátero



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

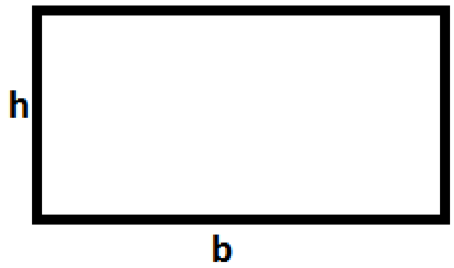
$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Paralelogramo



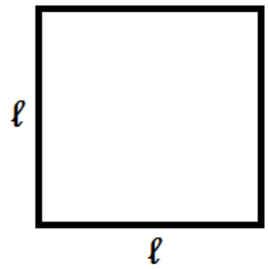
$$S = b.h$$

Retângulo



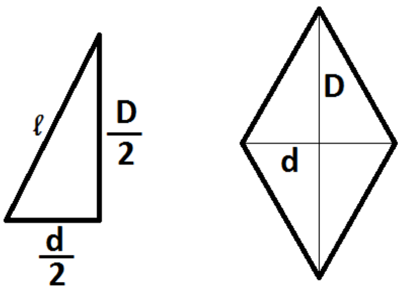
$$S = b.h$$

Quadrado



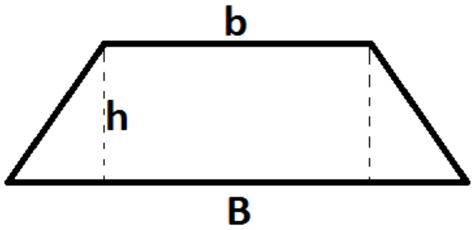
$$S = l^2$$

Losango



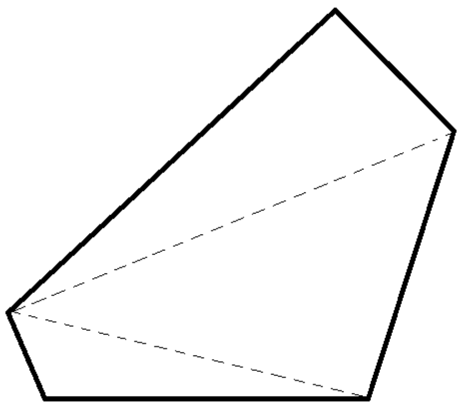
$$S = \frac{D.d}{2}$$

Trapézio



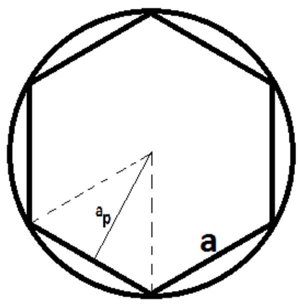
$$S = \frac{b+B}{2}.h$$

Quadrilátero irregular



Se decompõe em triângulos e se acha a área de cada um.

Hexágono



$$a_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

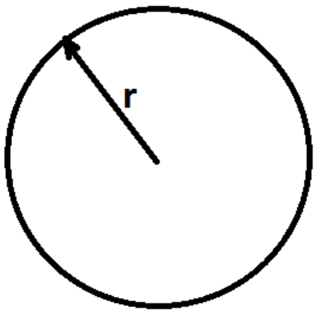
$$S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Polígono regular

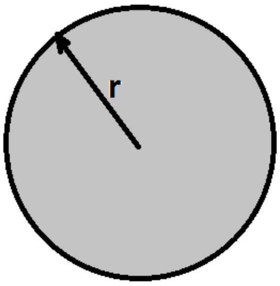
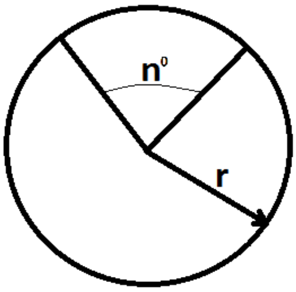
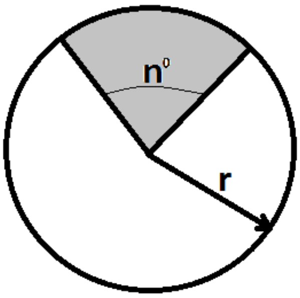
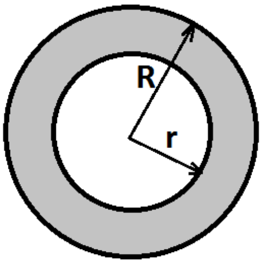
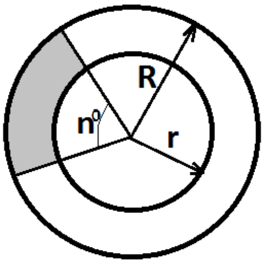
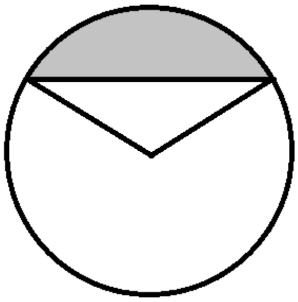
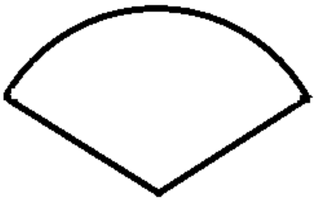
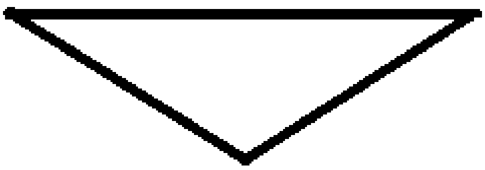
$$S = \frac{p.a_p}{2}$$

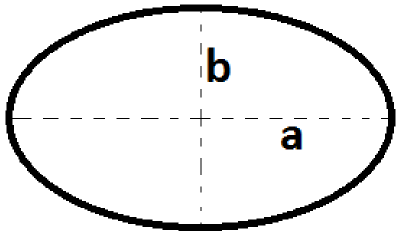
$$p = perímetro$$
$$a_p = apótema$$

Circunferência

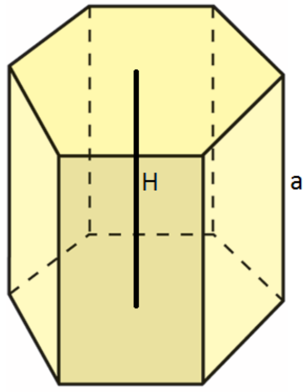
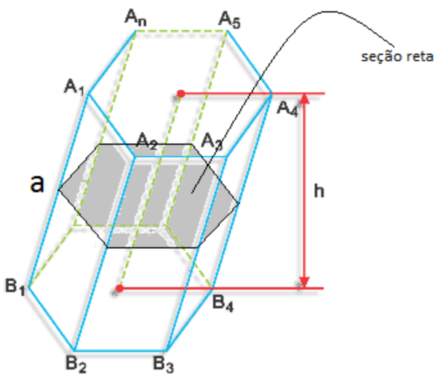
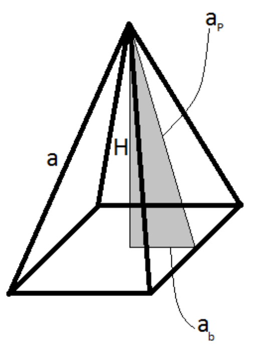


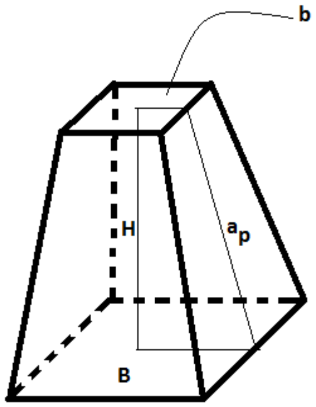
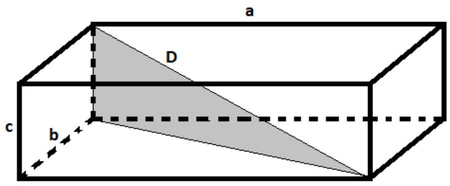
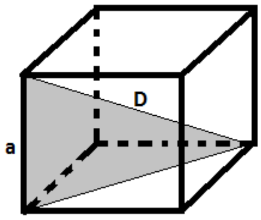
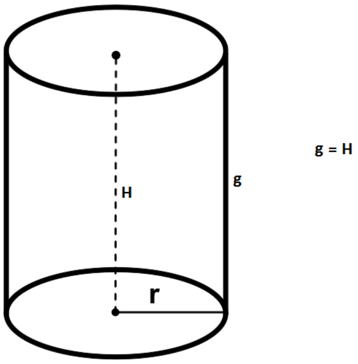
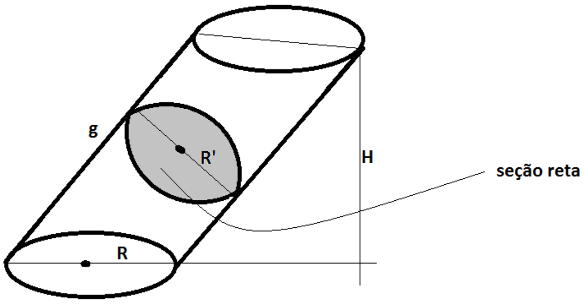
$$C = 2\pi r$$

Círculo	Arco de circunferência
 $S = \pi r^2$	 $C = \frac{2\pi r n^o}{360^o}$
Setor circular	**Coroa circular**
 $S = \frac{\pi r^2 n^o}{360^o}$	 $S = \pi(R^2 - r^2)$
Trapézio circular	**Seguimento circular**
 $S = \frac{\pi n^o (R^2 - r^2)}{360^o}$	 $S_{seg} = S_{setor} - S_{triângulo}$
Seguimento circular	**Segmento circular**
 Setor	 Triângulo

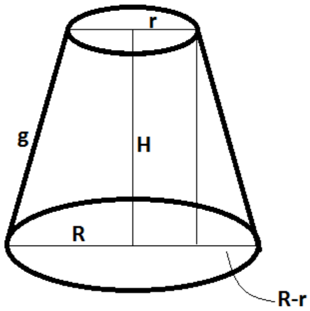
Elipse 	$S = \pi ab$

29.2 Áreas e volumes (espaço)

Prisma reto 	$S_L = p.a$ $S_T = S_L + 2.S_B$ $V = S_B.H$
Prisma oblíquo 	$S_L = P_{SR}.a$ $S_T = S_L + 2.S_B$ $V = S_{SR}.H$
Pirâmide regular 	$a_p^2 = a_b^2 + H^2$ $S_L = \frac{p.a_p}{2}$ $S_T = S_L + S_B$ $V = \frac{S_B.H}{3}$

Tronco de pirâmide 	$S_l = \frac{p + p'}{2} . a_p$ $S_t = S_l + S_B + S_b$ $p = perímetro\ da\ base\ maior$ $p' = perímetro\ da\ base\ menor$ $V = \frac{H}{3}\left[S_B + S_b + \sqrt{S_B . S_b}\right]$
Paralelepípedo retângulo 	$S = 2ab + 2bc + 2ac$ $V = a.b.c$ $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Cubo 	$S = a^2$ $V = a^3$ $D = a\sqrt{3}$
Cilindro reto 	$S_l = 2\pi r \quad (g = geratriz)$ $S_t = 2\pi r g + 2\pi r^2$ $V = \pi r^2 H$
Cilindro oblíquo 	$S_L = 2\pi R' g$ $S_t = 2\pi R' g + 2\pi R^2$ $V = \pi R'^2 H$

Tronco de cone

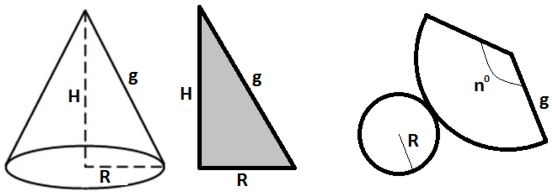


$$S_L = \pi g(R + r)$$

$$S_T = S_L + \pi(R^2 + r^2)$$

$$V = \frac{\pi H}{3}[R^2 + r^2 + Rr]$$

Cone reto



$$S_L = \pi R g$$

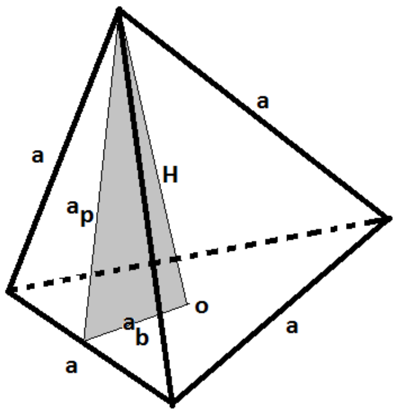
$$g^2 = H^2 + R^2$$

$$S_T = \pi R g + \pi R^2$$

$$\frac{360^0}{n^0} = \frac{g}{R}$$

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

Tetraedro regular



$$a_p^2 = H^2 + a_b^2$$

$$S = a^2\sqrt{3}$$

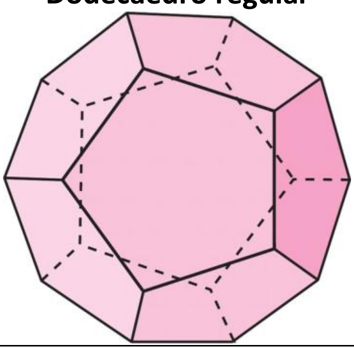
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

O=baricentro

$$a_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

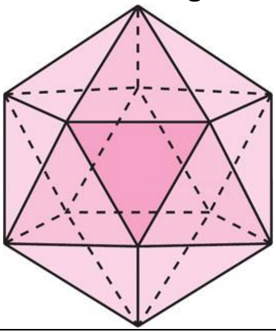
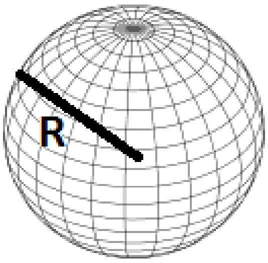
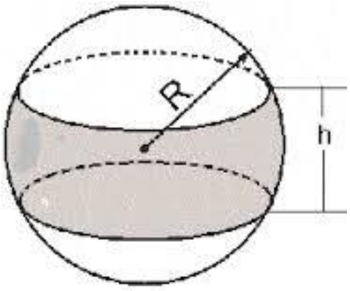
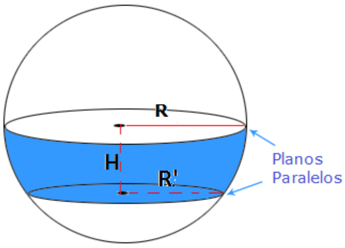
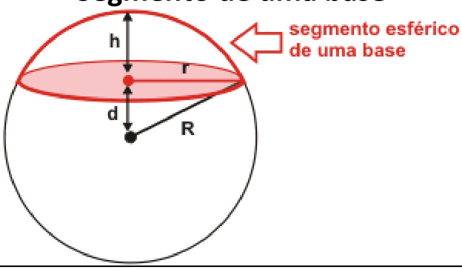
$$a_b = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

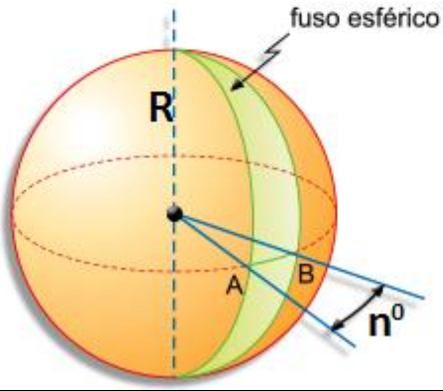
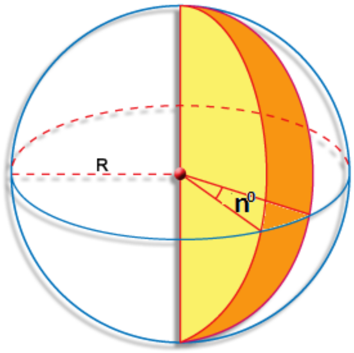
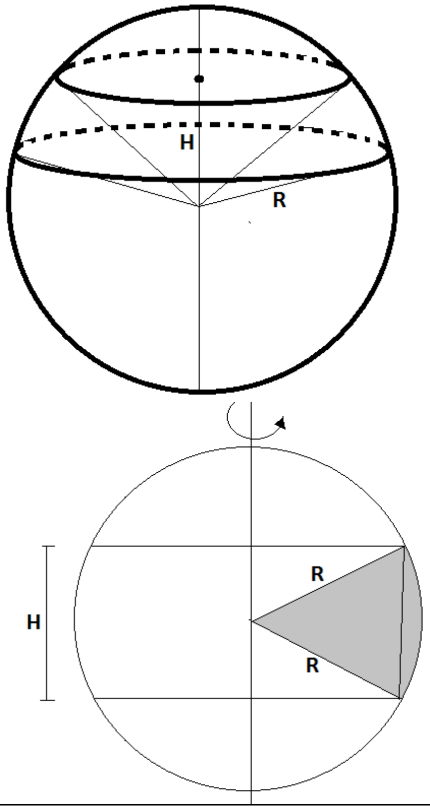
Dodecaedro regular

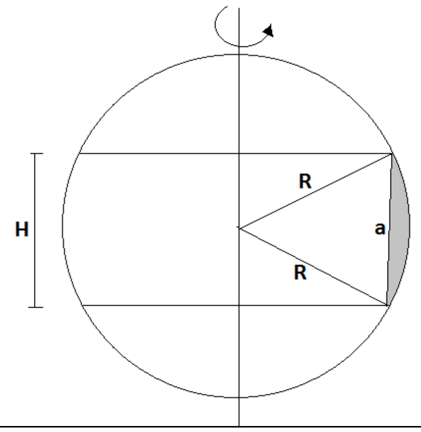
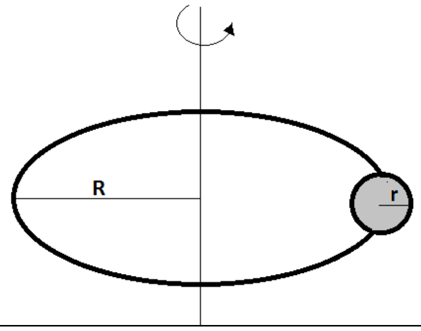


$$S = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$$

$$V = \frac{a^3}{4}\left(15 + 7\sqrt{5}\right)$$

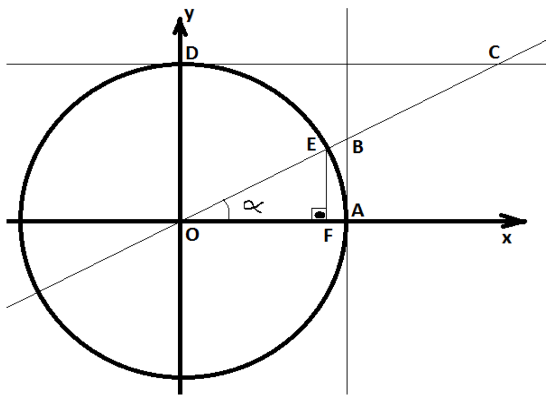
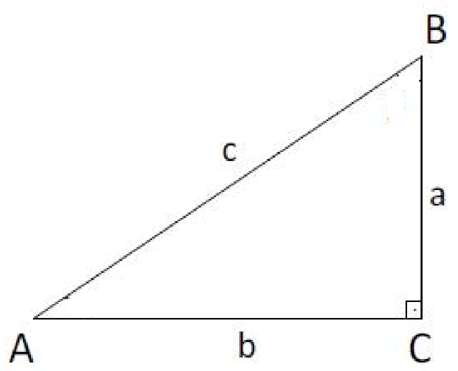
Icosaedro regular 	$S = 5a^2\sqrt{3}$ $V = \frac{5a^3}{12}(3+\sqrt{5})$
Esfera  	$S = 4\pi R^2$ $V = \frac{4\pi R^3}{3}$
Zona esférica  	$S = 2\pi RH$
Segmento de duas bases  	$V = \frac{\pi H^3}{6} + \frac{\pi H}{2}[R^2 + R'^2]$
Segmento de uma base  	$V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$

Fuso esférico 	$S = \frac{4\pi R^2 n^0}{360^0}$
Cunha esférica 	$V = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi R^3 n^0}{360^0}$
Setor esférico 	$V = 2\pi RH \frac{R}{3}$

<table>
<tr>
<td>Anel esférico
</td>
<td>$$V_a = \frac{1}{6}\pi a^2 R$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Toro
</td>
<td>$$A_t = 4\pi^2 Rr$$
$$V_t = 2\pi^2 Rr^2$$</td>
</tr>
</table>

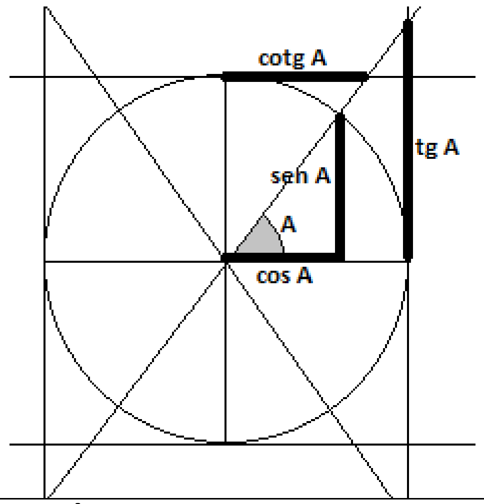
30 TRIGONOMETRIA

30.1 Círculo e funções trigonométricas

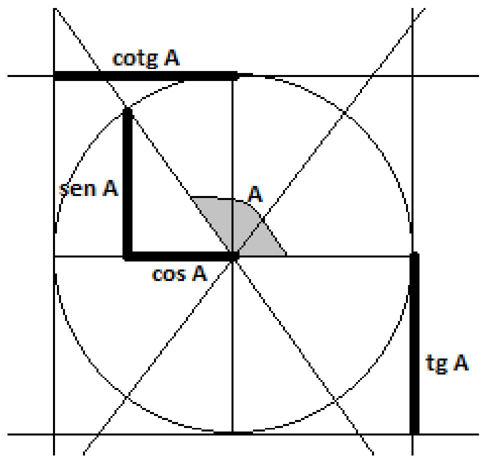
<table>
<tr>
<td></td>
<td>$$sen\alpha = EF$$
$$\cos \propto = OF$$
$$tg \propto = AB$$
$$ctg \propto = DC$$
$$\sec \propto = OB$$
$$cossec \propto = OC$$
$$OE = R = 1$$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>$$senA = \frac{a}{c}\ ,\ senB = \frac{b}{c}\ ,\ cosA = \frac{b}{c}, cosB = \frac{a}{c}$$
$$secA = \frac{1}{cosA}\ ,\ secB = \frac{1}{cosB}$$
$$cossecA = \frac{1}{senA}\ , cossecB = \frac{1}{senB}$$
$$tgA = \frac{senA}{cosA}\ ,\ tgB = \frac{senB}{cosB}$$
$$cotgA = \frac{1}{tgA}\ ,\ cotgB = \frac{1}{tgB}$$</td>
</tr>
</table>

30.2 Linhas trigonométricas

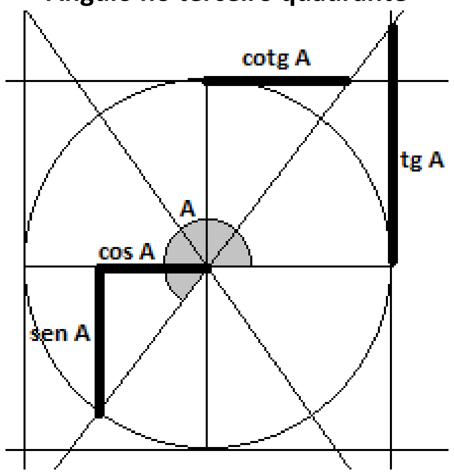
Ângulo no primeiro quadrante



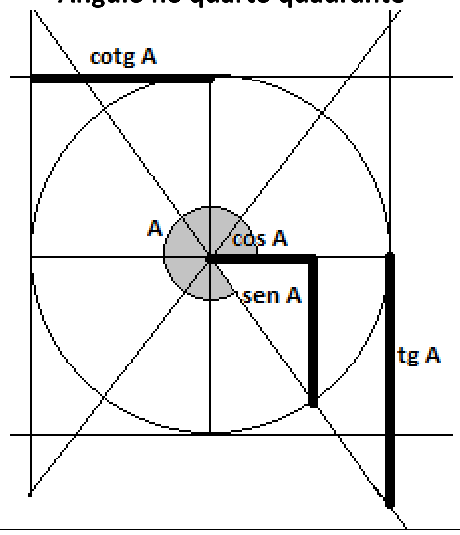
Ângulo no segundo quadrante



Ângulo no terceiro quadrante

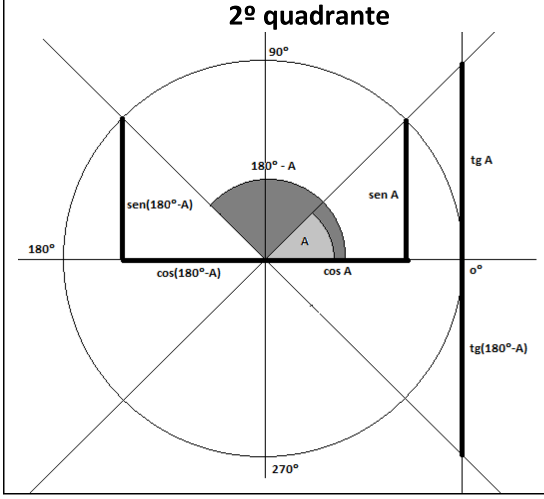


Ângulo no quarto quadrante



30.3 Redução ao primeiro quadrante

2º quadrante

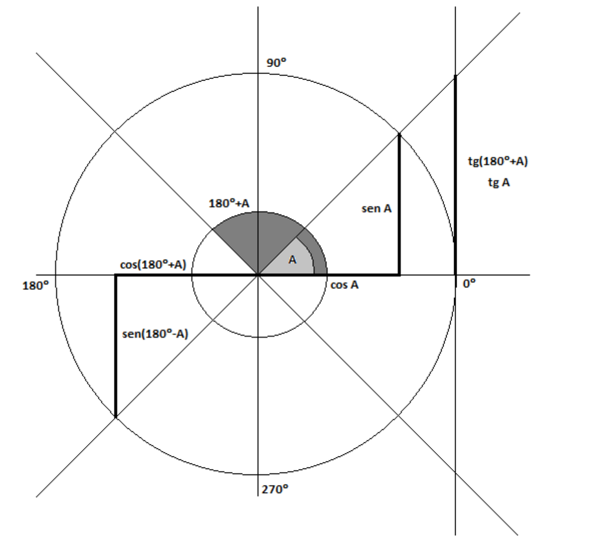


$$sen(180^0 - A) = senA$$

$$cos(180^0 - A) = -cosA$$

$$tg(180^0 - A) = -tgA$$

3º quadrante

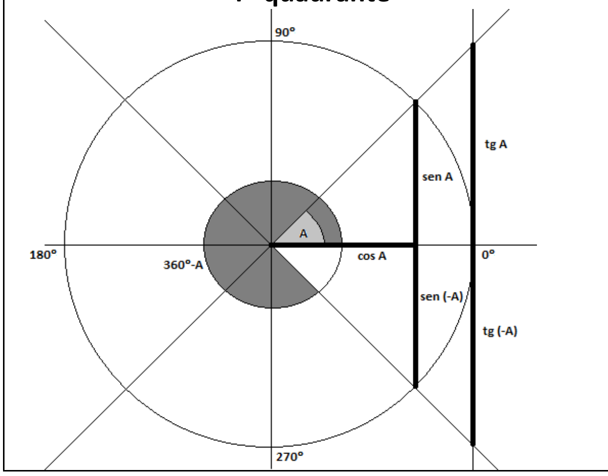


$$sen(180^0 + A) = -senA$$

$$\cos(180^0 + A) = -cosA$$

$$\text{tg}(180^0 + A) = tgA$$

4º quadrante



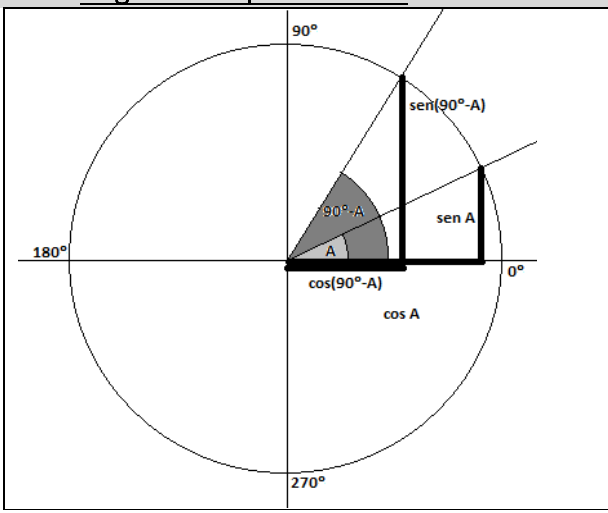
$$senA = -sen(-A) = -sen(360^0 - A)$$

$$cosA = cos(-A) = cos(360^0 - A)$$

$$tgA = -tg(-A) = -tg(360^0 - A)$$

Se o ângulo dado ultrapassa os 360^0 se divide por 360^0 usando o resto lançando-o no círculo trigonométrico e reduzindo-o ao primeiro quadrante.

30.4 Ângulos complementares



$$sen(90^0 - A) = cosA$$

$$cos(90^0 - A) = senA$$

$$tg(90^0 - A) = cotgA$$

30.5 Relações fundamentais

$sen^2x + cos^2x = 1$	$secx = \frac{1}{cosx}$
$tgx = \frac{senx}{cosx}$	$cossecx = \frac{1}{x}$
$cotgx = \frac{cosx}{xenx}$	$tgx = \frac{1}{cotgx}$
$1 + tg^2x = sec^2x$	$1 + cotg^2x = cossec^2x$
$tg^2x + 1 = sec^2x$	$cotg^2x + 1 = cossec^2x$
$cos^2x = \frac{1}{1+tg^2x}$	$sen^2x = \frac{tg^2x}{1+tg^2x}$

30.6 Campos de variação

Domínio	Contradomínio
$senx: \quad R$	$-1 \leq senx \leq +1$
$cosx: \quad R$	$-1 \leq cosx \leq +1$
$tgx: \quad R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\} \qquad K \in Z$	$-\infty \leq tgx \leq +\infty$
$cossecx: \quad R - \{K\pi\} \quad K \in Z$	$\lvert cossecx \rvert \geq 1$
$secx: \quad R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$	$\lvert secx \rvert \geq 1$
$cotgx: \quad R - (k\pi) \qquad k \in Z$	$-\infty \leq cotgx \leq +\infty$

30.7 Ângulo duplo

$sen2x = 2senx.cosx$	$cos2x = cos^2x - sen^2x$	$tg2x = \frac{2tgx}{1-tg^2x}$

30.8 Ângulo triplo

$sen3x = 3senx - 4sen^3x$	$cos3x = 4cos^3x - 3cosx$	$tg3x = \frac{3tgx - tg^3x}{1-3tg^2x}$

30.9 Razões de um ângulo em função do cosseno do ângulo duplo.

$senx = \sqrt{\frac{1-cos2x}{2}}$	$sen\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-cosx}{2}}$
$cosx = \sqrt{\frac{1+cos2x}{2}}$	$cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+cosx}{2}}$
$tgx = \sqrt{\frac{1-cos2x}{1+cos2x}}$	$tg\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}$

30.10 Transformação em produto (PROSTAFÉRESE)

$senA + senB = 2sen\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}$	$senA - senB = 2cos\frac{A+B}{2}sen\frac{A-B}{2}$

$cosA + cosB = 2cos\dfrac{A+B}{2}cos\dfrac{A-B}{2}$	$cosA - cosB = -2sen\dfrac{A+B}{2}sen\dfrac{A-B}{2}$
$tgA + tgB = \dfrac{sen(A+B)}{cosA.cosB}$	

30.11 Razões do ângulo soma ou diferença

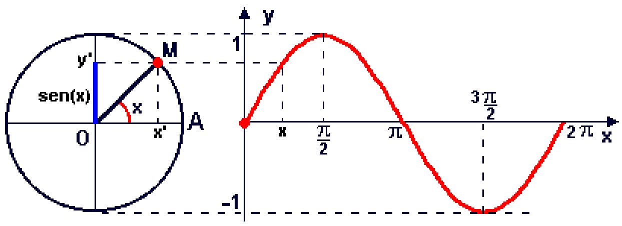
$sen(A+B) = senA.cosB + cosA.senB$	$cos(A+B) = cosA.cosB - senA.senB$
$sen(A-B) = senA.cosB - cosA.senB$	$cos(A-B) = cosA.cosB + senA.senB$
$tg(A+B) = \dfrac{tgA + tgB}{1 - tgA.tgB}$	$tg(A-B) = \dfrac{tgA - tgB}{1 + tgA.tgB}$

30.12 Razões de ângulo em função da tangente do ângulo metade

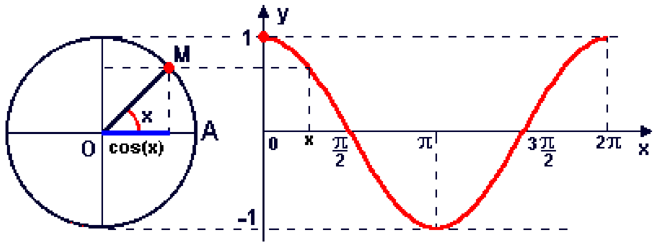
$sen2x = \dfrac{2tgx}{1 + tg^2x}$	$senx = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$
$cos2x = \dfrac{1 - tg^2x}{1 + tg^2x}$	$cos2x = \dfrac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$
$tgx = \dfrac{2 + tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}}$	

30.13 Gráficos das funções

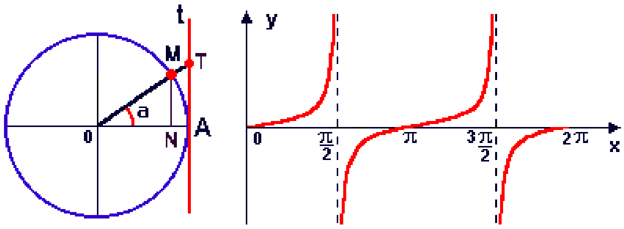
Função seno



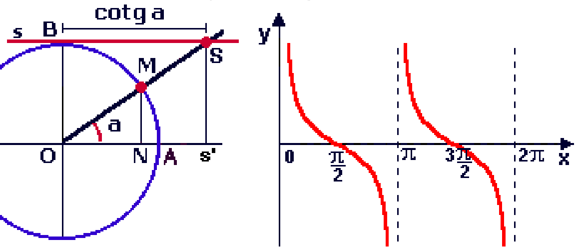
Função cosseno



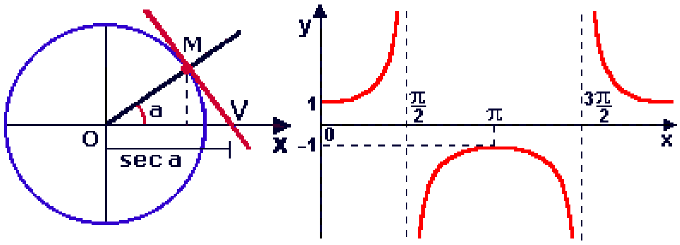
Função tangente



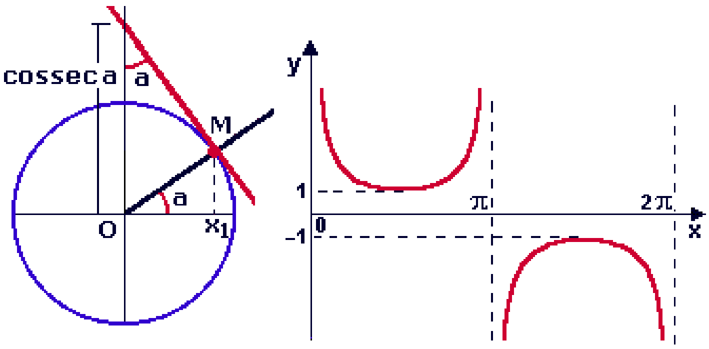
Função tangente



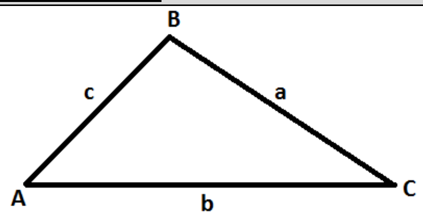
Função secante



Função cossecante

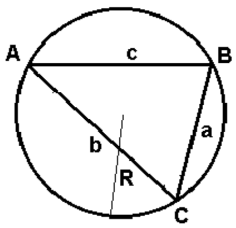


30.14 Fórmulas de BRIGGS

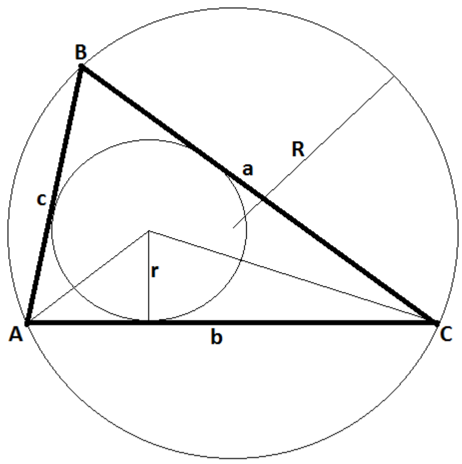
		$p = \dfrac{a+b+c}{2}$
$sen\,\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b).(p-c)}{bc}}$	$sen\,\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a).(p-c)}{ac}}$	$sen\,\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a).(p-b)}{ab}}$
$cos\,\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$	$cos\,\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-b)}{ac}}$	$cos\,\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-c)}{ab}}$

- Para obter as tangentes dos ângulos metade se divide membro a membro.
- Para obter o ângulo inteiro utilizamos as fórmulas que dão as razões de um ângulo em função do cosseno do ângulo duplo.

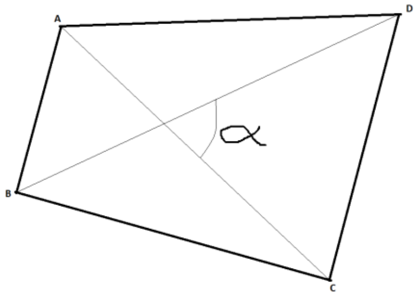
30.15 Teoremas importantes

	
Teorema dos senos	$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R$
Teorema dos cossenos	$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cosA$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.cosB$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.cosC$
Teorema da tangente	$\frac{a+b}{a-b} = \frac{senA + senB}{senA - senB} = \frac{tg\frac{A+B}{2}}{tg\frac{A-B}{2}}$

30.16 Área de um triângulo

	$S = \frac{ab.senC}{2} = \frac{bc.senA}{2} = \frac{ac.senB}{2}$ $p = \frac{a+b+c}{2}$
	Fórmula de Heron $S = \sqrt{p(p-a).(p-b).(p-c)}$
	$S = p.r = \frac{abc}{4R} = \frac{p}{2R}$

30.17 Área de um quadrilátero



$$S = \frac{AC.BD}{2}.sen\alpha$$

30.18 Variações das funções básicas

Função	Domínio	Contradomínio	Período
$y = a + b.sencx$	R	$-b + a \leq y \leq b + a$	$p = \frac{2\pi}{c}$
$y = a + b.coscx$	R	$-b + a \leq y \leq b + a$	$p = \frac{2\pi}{c}$
$y = a + b.tgcx$	$x \neq \frac{k\pi}{c}$	R	$p = \frac{\pi}{c}$
$y = a + b.cotgcx$	$x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{k\pi}{c}$	R	$p = \frac{\pi}{c}$
$y = a + b.seccx$	$x \neq \frac{\pi}{2c} + \frac{k\pi}{c}$	$y \leq -b + a\ V\ y \geq b + a$	$p = \frac{2\pi}{c}$
$y = a + b.cosseccx$	$x \neq \frac{k\pi}{c}$	$y \leq -b + a\ V\ y \geq b + a$	$p = \frac{2\pi}{c}$

- Alterando o ângulo (x) altera o período e, consequentemente, o domínio.
- Multiplicando o ângulo por uma constante, o período fica dividido e se dividirmos o ângulo o período fica multiplicado pela mesma constante.

30.19 Equações fundamentais

Procura-se recair em uma das seguintes equações:

$$senx = m = sen\alpha \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{Bmatrix} \Rightarrow x = (-1)^k.\alpha + k\pi$$

$$cosx = n = cos\alpha \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{Bmatrix} \Rightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi$$

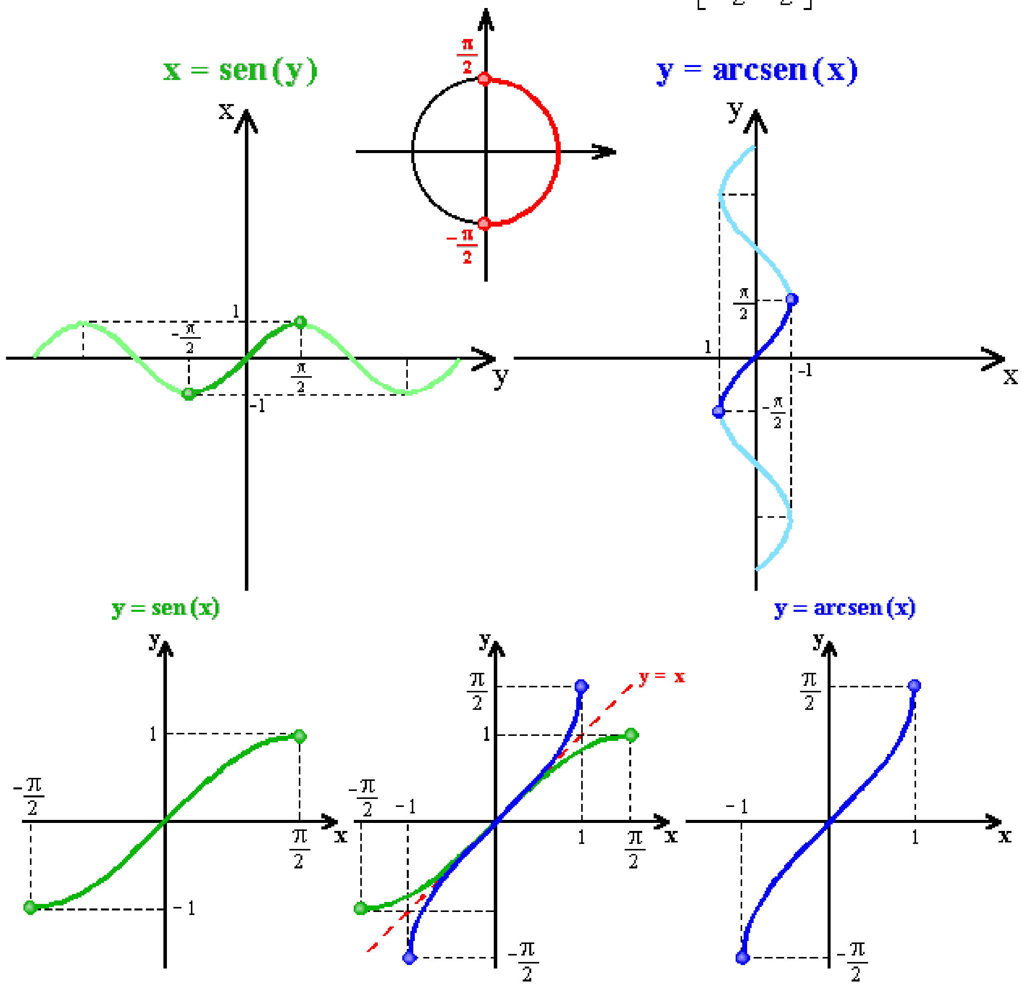
$$tgx = t = tg\alpha \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi + \alpha + 2k\pi \end{Bmatrix} \Rightarrow x = \alpha + k\pi$$

30.20 Funções trigonométricas inversas

Arco-seno

$$y = arcsenx \leftrightarrow \left| \begin{array}{l} seny = x \\ -\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$y = \operatorname{arcsen}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{sen}(y) \quad \text{e} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$Dom = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

$Im = [-1, 1]$

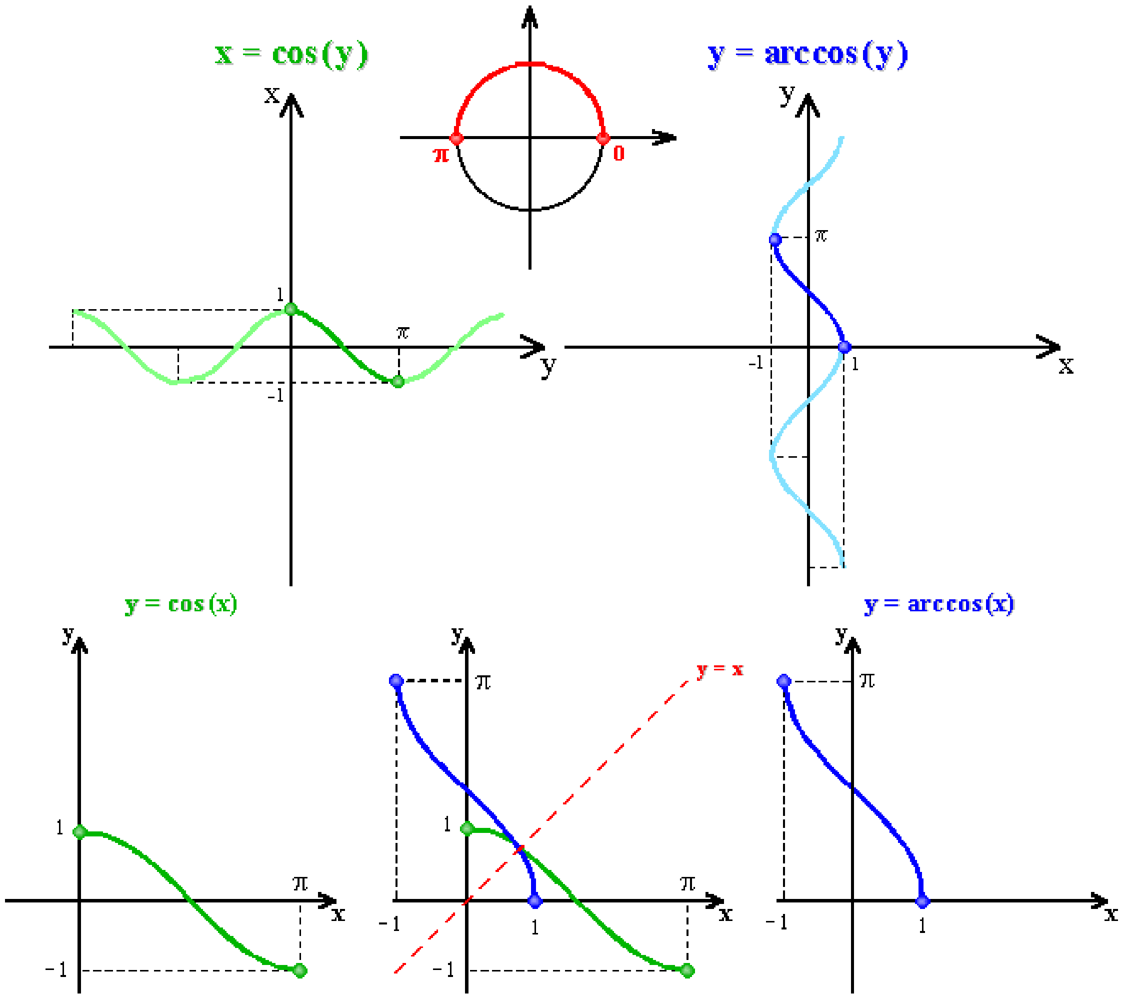
$Dom = [-1, 1]$

$Im = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Arco-cosseno

$$y = arccosx \leftrightarrow \begin{vmatrix} cosy = x \\ 0 \leq y \leq \pi \end{vmatrix}$$

$$y = \arccos(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos(y) \quad \text{e} \quad y \in [0, \pi]$$



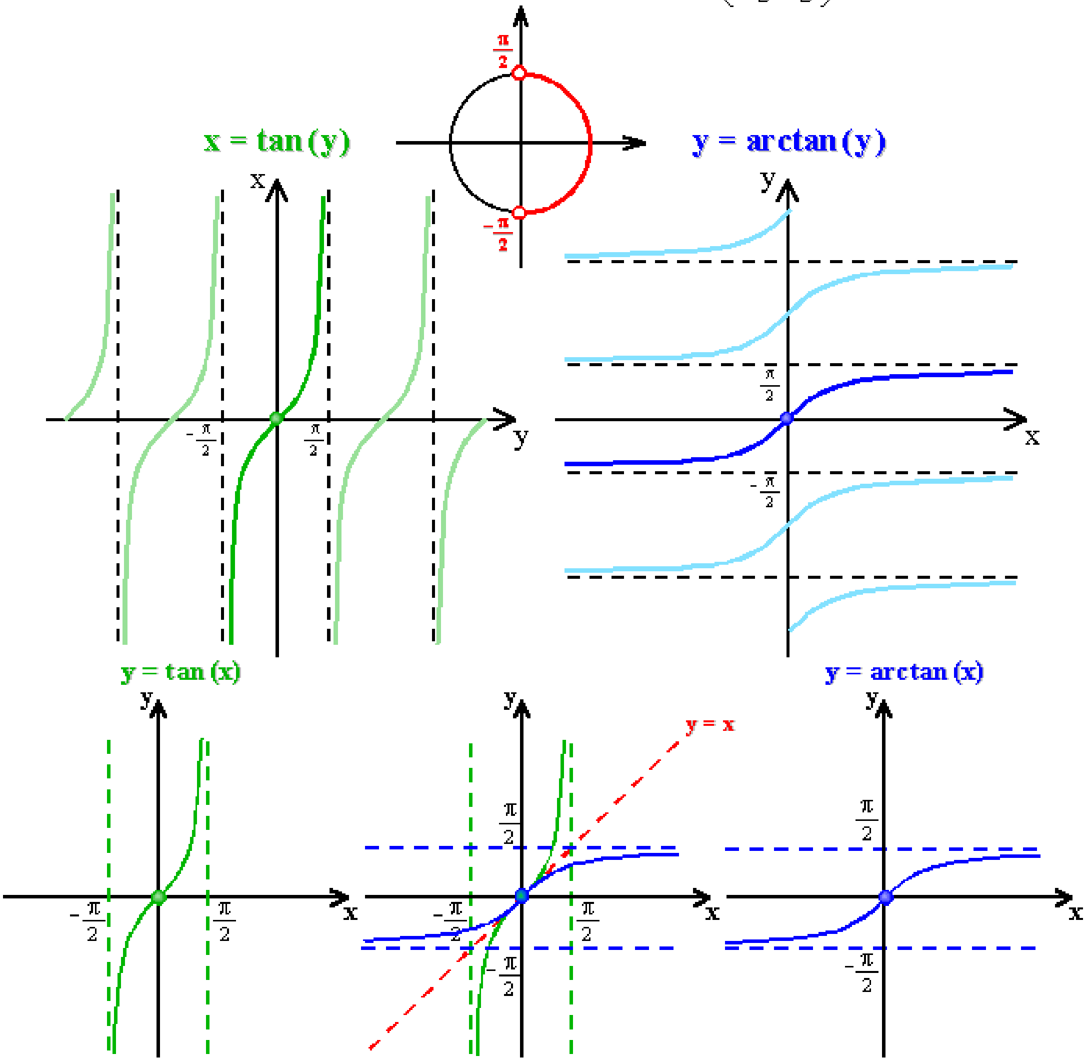
$Dom = [0, \pi]$ $\qquad$ $Dom = [-1, 1]$

$Im = [-1, 1]$ $\qquad$ $Im = [0, \pi]$

Arco-tangente

$$y = arctgx \leftrightarrow \left| \begin{array}{l} tgy = x \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$y = \arctan(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \tan(y) \quad \text{e} \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



$Dom = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$Im = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$

$Dom = \mathbb{R}$

$Im = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

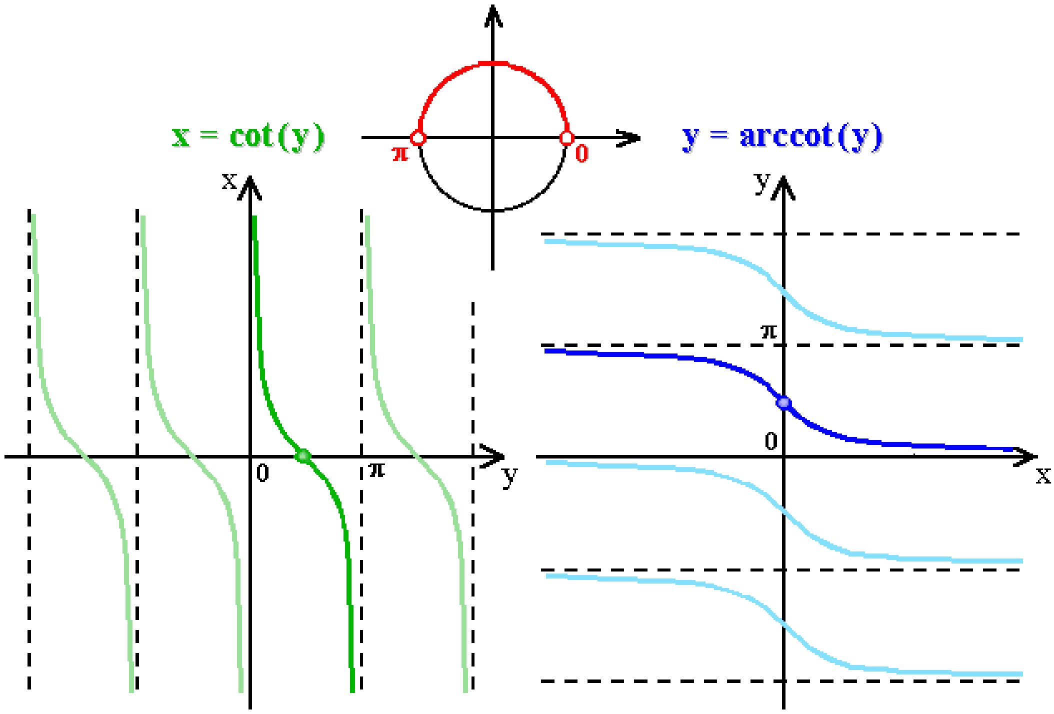
$\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$

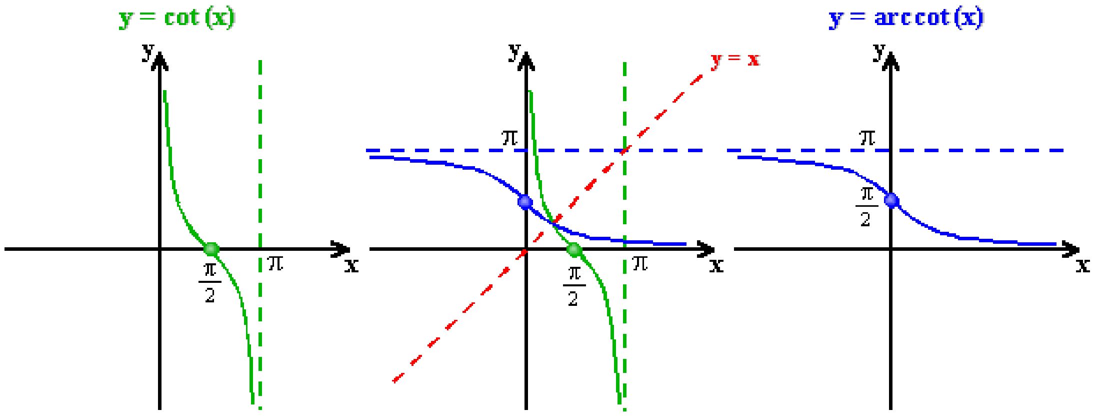
$\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Arco-cotangente

$$y = arctgx \leftrightarrow \begin{vmatrix} cotgy = x \\ 0 < y < \pi \end{vmatrix}$$

$$y = \text{arccot}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \cot(y) \quad \text{e} \quad y \in (\,0\,,\pi\,)$$





$Dom = (\,0\,,\pi\,)$

$Im = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \cot(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to \pi^-} \cot(x) = -\infty$

$Dom = \mathbb{R}$

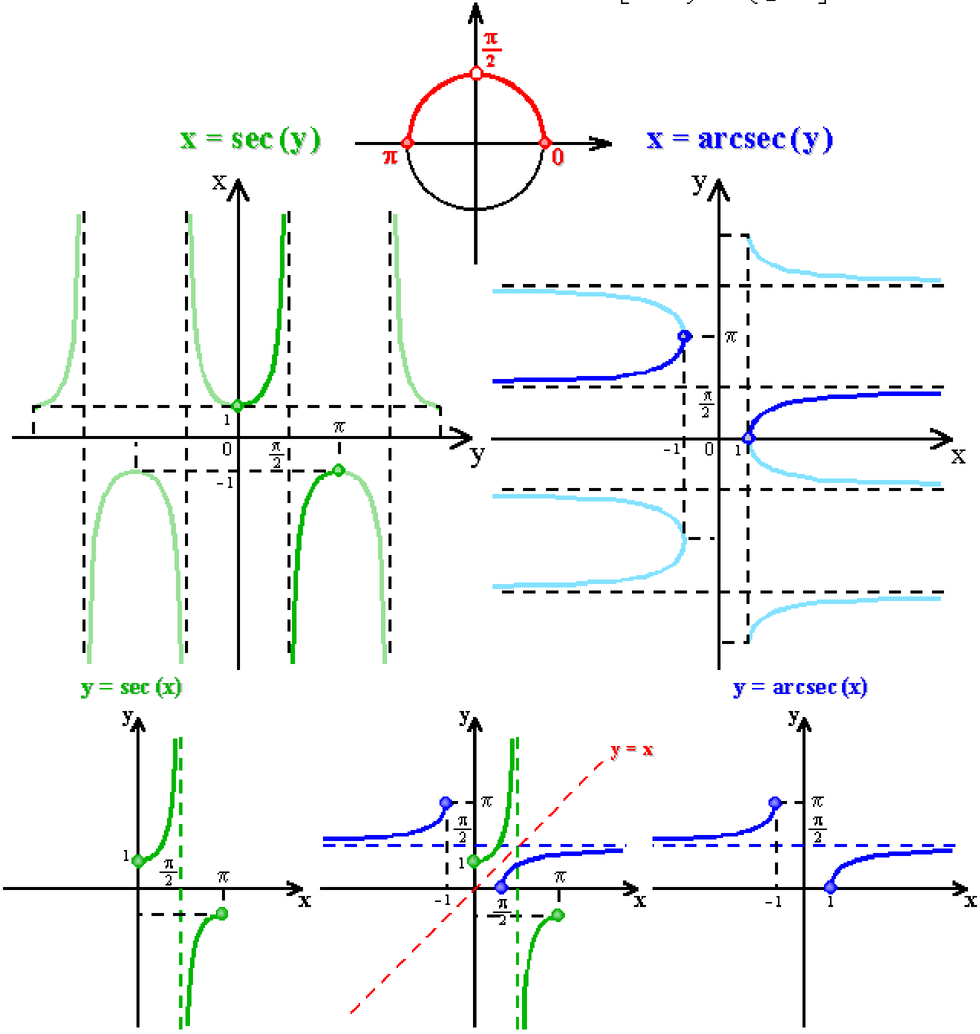
$Im = (\,0\,,\pi\,)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \text{arccot}(x) = \pi$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \text{arccot}(x) = 0$

Arco-secante

$$y = \operatorname{arcsec}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \sec(y) \quad \text{e} \quad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$



$$Dom = \left[0, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$Im = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sec(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \sec(x) = -\infty$$

$$Dom = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

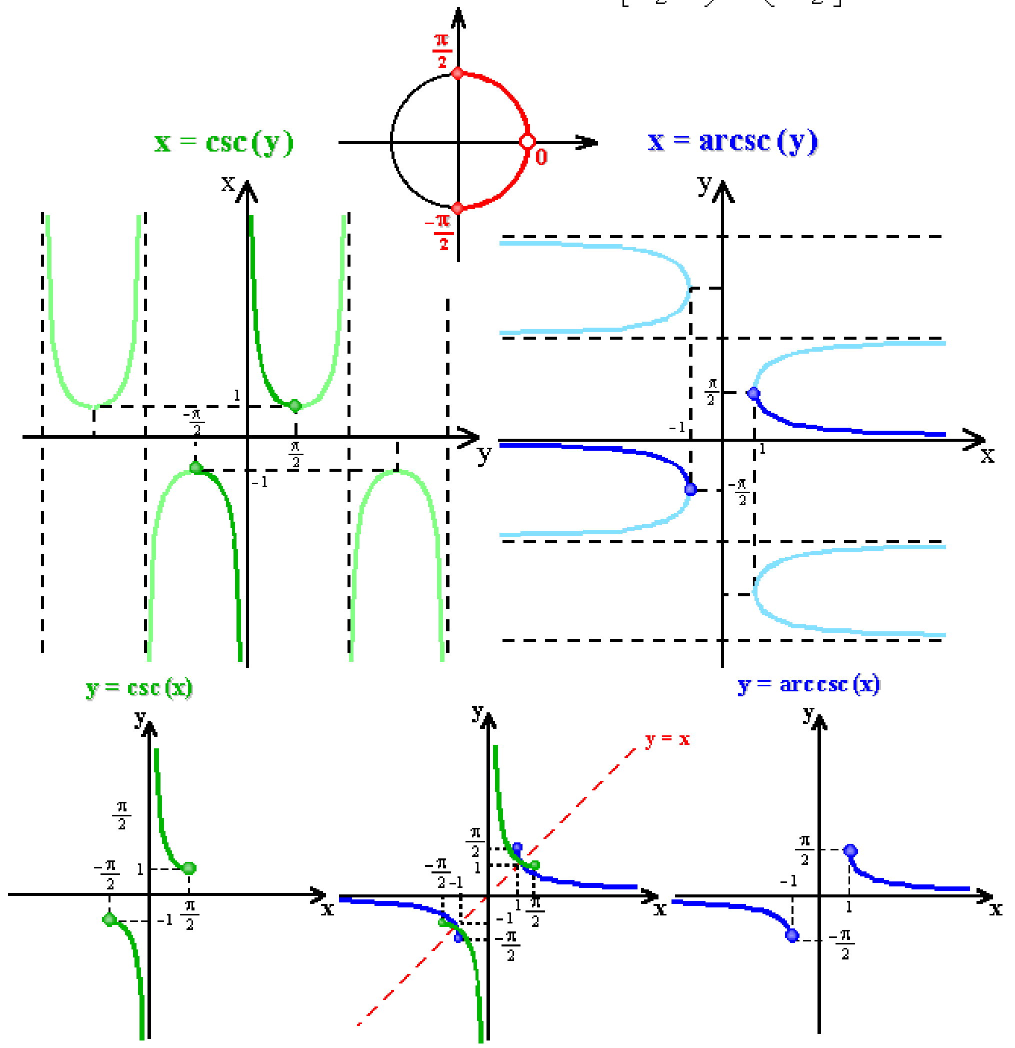
$$Im = \left[0, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arcsec}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arcsec}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Arco-cossecante

$$y=\operatorname{arccsc}(x) \iff x=\csc(y) \ \text{ e } \ y \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right) \cup \left(0,\frac{\pi}{2}\right]$$



$Dom = \left[-\frac{\pi}{2},0\right) \cup \left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

$Im = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \csc(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \csc(x) = +\infty$

$Dom = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

$Im = \left[-\frac{\pi}{2},0\right) \cup \left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arccsc}(x) = 0$

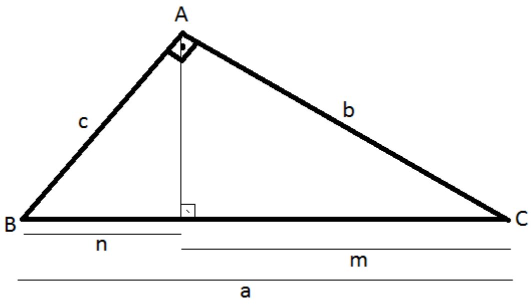
$\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arccsc}(x) = 0$

30.21 Transformação em produto

$sen(a+b)+sen(a-b)=2sena.cosb$ $sen(a+b)-sen(a-b)=2senb.cosa$ $cos(a+b)+cos(a-b)=2cosa.cosb$ $cos(a+b)-cos(a-b)=-2sena.senb$	
$\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases} \quad a=\frac{p+q}{2} \quad b=\frac{p-q}{2}$	
$\cos p+cosq=2cos\frac{p+q}{2}.cos\frac{p-q}{2}$	$\cos p-\cos q=-2sen\frac{p+q}{2}.sen\frac{p-q}{2}$

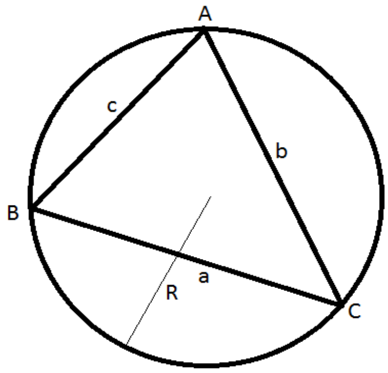
$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2sen\frac{p+q}{2}.cos\frac{p-q}{2}$	$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2sen\frac{p-q}{2}.cos\frac{p+q}{2}$

30.22 Triângulos retângulos



$B + C = 90^0$	$a^2 = b^2 + c^2$	$b = a.cosC$
$b^2 = a.m$	$S = \frac{a.h}{2} = \frac{b.c}{2}$	$c = b.cotgB$
$c^2 = a.n$	$c = a.senC$	$b = c.cotgC$
$b^2 = m.n$	$b = a.senB$	$c = b.tgC$
$b.c = a.h$	$c = a.cosB$	$b = c.tgB$

30.23 Triângulos obliquângulos



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cosA$$

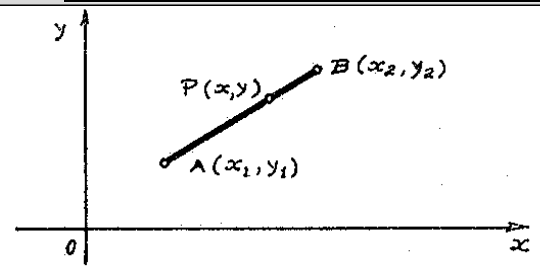
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.cosB$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc.cosC$$

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R$$

31 GEOMETRIA ANALÍTICA

31.1 Coordenadas de um ponto razão de seção

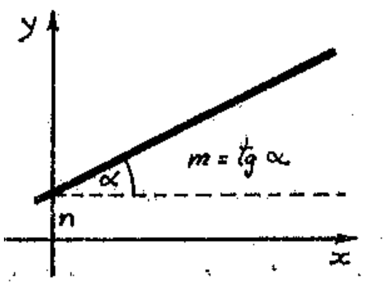


$$\frac{AP}{BP} = r$$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

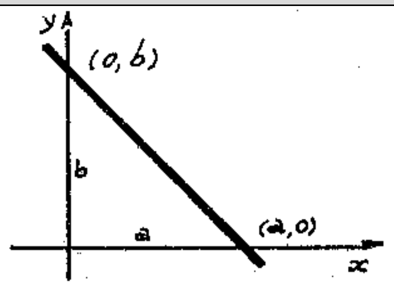
$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

31.2 Equações da reta

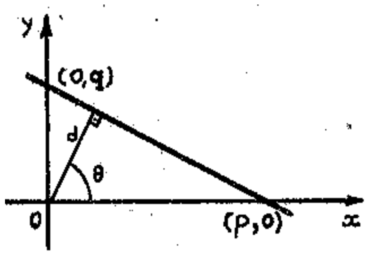
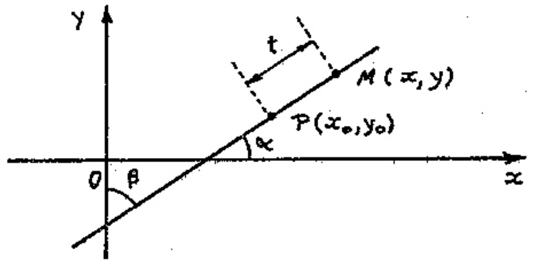


$$m = -\frac{a}{b}$$

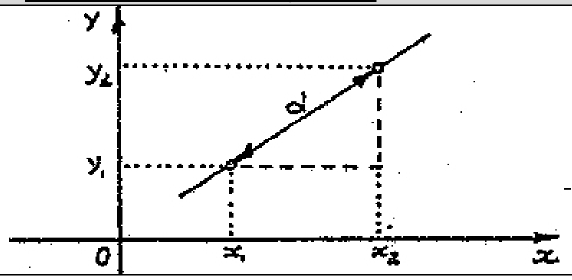
$$n = -\frac{c}{b}$$



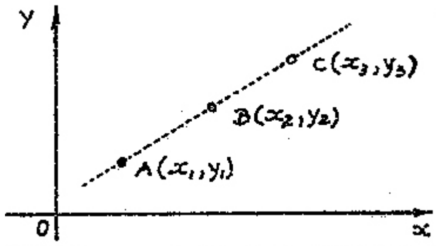
$$coeficiente\ angular\ \rightarrow m = -\frac{a}{b}$$

$coeficiente\ linear\ \rightarrow\ -\frac{c}{b}$	
Equação explícita: (reduzida): $y = mx + n$	
Equação implícita: (geral): $ax + by + c = 0$	
Equação segmentária: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $(a, 0)$ →ponto de encontro com o eixo $\overline{O_x}$ $(0, b)$ →ponto de encontro com o eixo $\overline{O_y}$	
Equação normal:  	$ax + by + c = 0$ $\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$ Ou $x\cos\theta + y\,sen\theta + d = 0$ Distância da reta à origem: $d = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$
Equação paramétrica:  	$y = y_0 + t\cos\beta$ $x = x_0 + t\cos\alpha$ $\cos\alpha$ e $\cos\beta$ são os cossenos diretores da reta.

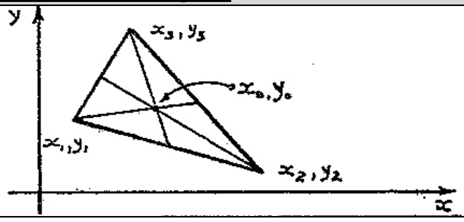
31.3 Distância entre dois pontos

 	$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

31.4 Condição de alinhamento

 	$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$

31.5 Área de um triângulo

	$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right\|$
Baricentro do triângulo	$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ $y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

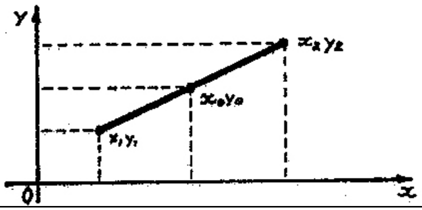
31.6 Reta que passa por um ponto

Ponto $P(x_1, y_1)$	$R = (y - y_1) = m(x - x_1)$ $m = declividade$

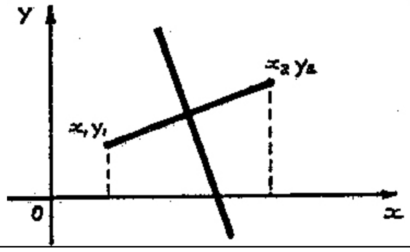
31.7 Reta que passa por dois pontos

$P_1(x_1, y_1)\ ;\ P_2(x_2, y_2)$	$P \cong y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0$

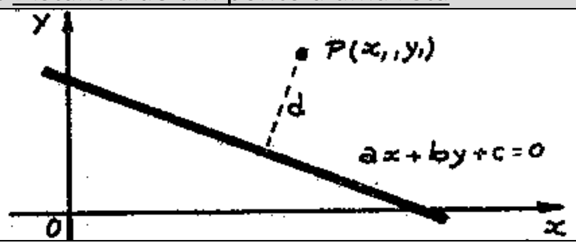
31.8 Ponto médio de um segmento

	$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$

31.9 Mediatriz de um segmento

	$M \equiv \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$

31.10 Distância de um ponto a uma reta

	$d = \left\|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right\|$

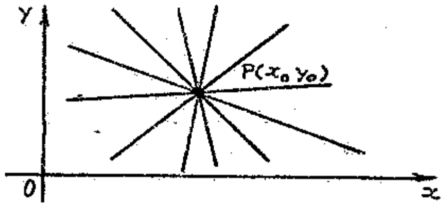
31.11 Retas paralelas

$\left.\begin{matrix} y = mx + n \\ y = m' + n' \end{matrix}\right\} \; são\ paralelas\ se\ m = m'$	$\left.\begin{matrix} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{matrix}\right\} \; são\ paralelas\ se\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

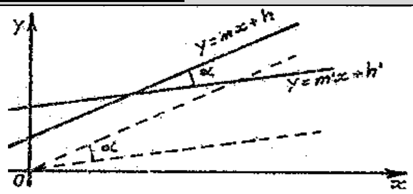
31.12 Retas perpendiculares

$\left.\begin{matrix} y = mx + n \\ y = m' + n' \end{matrix}\right\} \; são\ paralelas\ se\ m = -\frac{1}{m'}$	$\left.\begin{matrix} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{matrix}\right\} \; são\ paralelas\ se\ \frac{a}{a'} = -\frac{b}{b'}$

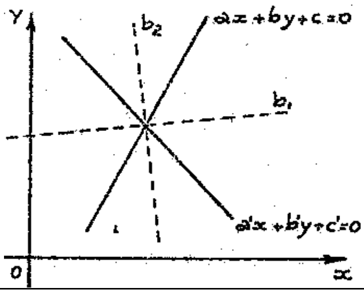
31.13 Feixe de retas

	$y - y_0 = m(x - x_0)$

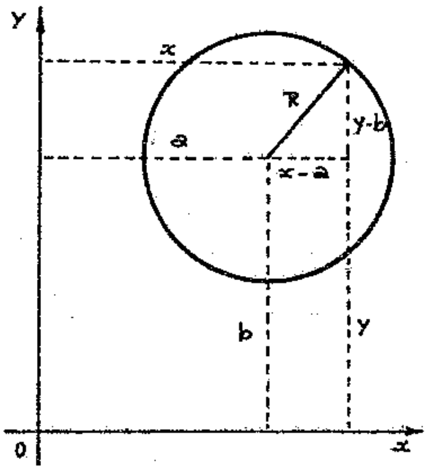
31.14 Feixe de duas retas

	$gt \propto = \frac{m - m'}{1 + m.m'}$

31.15 Bissetriz de um ângulo

	$b_1 \equiv \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$ A bissetriz de declive positivo formará um ângulo agudo. A de declive negativo, o obtuso.

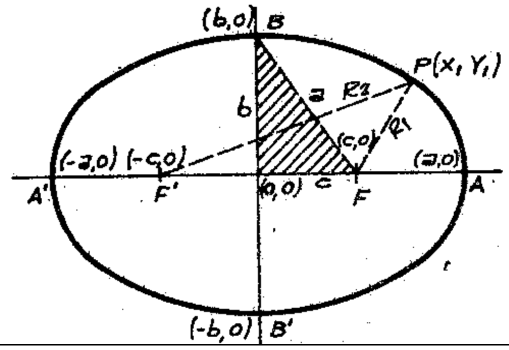
31.16 Circunferência

	$C \equiv (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ $C \equiv x^2 + y^2 Ax + By + C = 0$ $a = -\frac{A}{2} \qquad b = -\frac{B}{2}$ $R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4AC}}{2}$ $se\ \ (a, b)\ \ é\ \ (0,0)$ $C \equiv x^2 + y^2 = R^2$

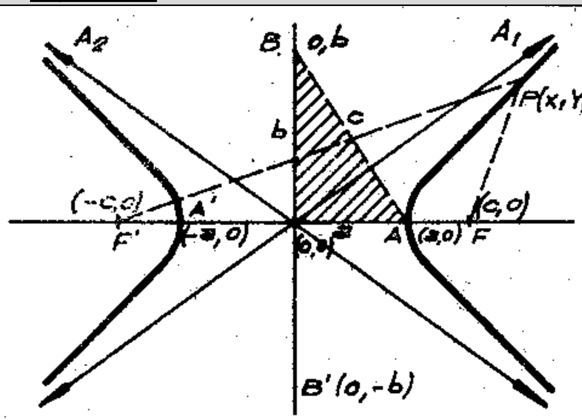
A) Tangente e Normal no ponto x_0 y_0 da circunferência	$T \equiv y - y_0 = \frac{x_0 - a}{y_0 - b}.(x - x_0)$ $N \equiv Y - Y_0 = -\frac{Y_0 - b}{Y_0 - a}.(x - x_0)$
B) Eixo radical de duas circunferências dadas	$C_1 \equiv X^2 + Y^2 + Ax + By + C = 0$ $C_2 \equiv x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' = 0$ $Eixo \equiv x(A - A') + y(B - B') + (C - C') = 0$
Se as circunferências forem secantes será a equação de secante comum. Se são tangentes será a equação da tangente comum.	
C) Potência de um ponto dado $P(X_1, Y_1)$	$C \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ $Potência \equiv x_1{}^2 + y_1{}^2 + Ax_1 + By_1 + C$ $Se\ Pot > 0 \rightarrow P\ é\ exterior$ $Se\ Pot = 0 \rightarrow P\ está\ na\ circunferência$ $Se\ Pot < 0 \rightarrow P\ é\ interior$
D) Obtenção do centro $C(x_0, y_0)$ e raio R de uma circunferência	$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$ Equação reduzida da circunferência
E) Posição de um ponto $A(x_1, y_1)$ em relação à circunferência.	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > R^2 \rightarrow (\ A\ \ externo)$ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \rightarrow (\ Está\ na\ cfc\ )$ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2 \rightarrow (\ A\ \ interno)$
F) Posição relativa de uma reta $Ax + By + C = 0$ com uma circunferência $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	$\left.\begin{matrix} Ax + By + C = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{matrix}\right\} \rightarrow Equação\ do\ 2º\ grau$ $\rightarrow \begin{cases} \Delta > 0\ \ a\ reta\ é\ secante \\ \Delta = 0\ \ a\ reta\ é\ tangente \\ \Delta < 0\ \ a\ reta\ é\ externa \end{cases}$
G) Posições relativas de duas circunferências	$\left(x - x_{0_1}\right)^2 + \left(y - y_{0_1}\right)^2 = R_1{}^2$ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

H) Distância entre os centros $$d = \sqrt{\left(x - x_{0_1}\right)^2 + \left(y - y_{0_1}\right)^2}$$ $$d > R + R_1 \rightarrow Circunferências\ externas$$ $$d = R + R_1 \rightarrow Circunferências\ tangentes\ externamente$$ $$d = \|R - R_1\| \rightarrow Circunferências\ tangentes\ internamente$$ $$\|R - R_1\| < d < \|R + R_1\| \rightarrow Circunferências\ secantes$$ $$0 < d < \|R - R_1\| \rightarrow Circunferências\ internas$$ $$d = 0 \rightarrow Circunferências\ concêntricas$$	
I) Tangentes a uma circunferência	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \rightarrow (circunferência)$ $A(x_1, y_1) \rightarrow (ponto\ A)$
J) Feixe de retas pelo ponto A	$y - y_2 = m(x - x_2) \rightarrow mx - y + (y_2 - mx_2) = 0$ $d_{C_1}t_1 = d_{C_1}t_2 = r = \left\|\dfrac{mx_0 - y_0 + (y_2 - mx_2)}{\sqrt{m^2 + 1}}\right\| \rightarrow m$

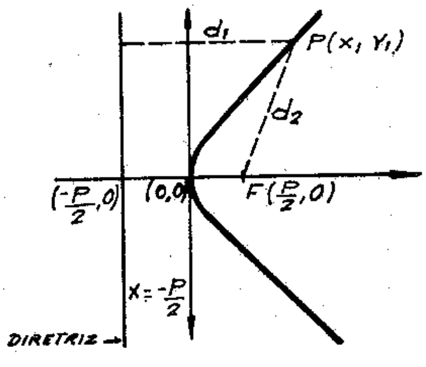
31.17 Elipse

	$Eixo\ maior\ \ AA' = 2a$ $Eixo\ menor\ BB' = 2b$ $Distância\ focal\ FF' = 2c$ $a^2 + b^2 = c^2$
Excentricidade	$e = \dfrac{c}{a} < 1$ $E \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ \ de\ centro\ (0,0)$ $E \equiv \dfrac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1\ \ de\ centro\ (\alpha, \beta)$
A) Tangente e normal em um ponto (x_0, y_0)	$T \equiv y - y_0 = -\dfrac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.(x - x_1)$ $N \equiv y - y_0 = -\dfrac{a^2 y_1}{b^2 x_1}.(x - x_1)$
B) Raios vetores	$R_1 + R_2 = 2a$ $R_1 = \sqrt{(x_1 + C)^2 + y_1^2}$ $R_2 = \sqrt{(x_1 - C)^2 + y_1^2}$

31.18 Hipérbole

	$c^2 = a^2 + b^2$ Eixo maior: $AA' = 2a$ Eixo menor: $BB' = 2b$ Distância focal: $FF' - 2a$ Excentricidade: $e = \frac{c}{a} > 1$
$H \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\; de\ centro\ (0{,}0)$	$H \equiv \frac{(x-\propto)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \;\; de\ centro\ (\alpha, \beta)$
A) Tangente e normal em um ponto (x_0, y_0) da hipérbole	$T \equiv y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.(x - x_0)$ $N \equiv y - y_0 = -\frac{a^2 x_0}{b^2 x_0}.(x - x_0)$
B) Equação das Assíntotas	$A_1 \equiv y = \frac{b}{a}x$ $A_2 \equiv y = -\frac{b}{a}x$ São tangentes à curva no infinito
C) Hipérbole equilátera	Se $a = b$ $HE \equiv x^2 - y^2 = a^2$ $A_1 = y = x$ $A_2 = y = -x$
Fazendo um giro de 45^0 e referindo a curva a suas assíntotas se transforma $xy = K,\ sendo\ K = \frac{a^2}{a}$	

31.19 Parábola

	$diretriz\ \ x = -\frac{P}{2}$ $P = parâmetro$ $F\left(\frac{P}{2}, 0\right) \;\; foco$ $P \equiv y^2 = 2Px$ $d_1 = d_2$

A) Tangente e normal em um ponto (x_0, y_0) da parábola	$Tangente: y - y_0 = P.\frac{x_0}{y_0}.(x - x_0)$ $Normal: y - y_0 = -\frac{1}{P}.\frac{y_0}{x_0}.(x - x_0)$
Se a diretriz é paralela ao eixo OX, será da forma $y = 2qx^2$. Se o centro não é a origem, a parábola toma a forma de um trinômio do segundo grau: $y = ax^2 + bx + c$	

31.20 Obtenção do tipo de curva dada uma equação do 2º grau

Equação do segundo grau:	$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$
$C^2 - 4AB < 0$	Elipse ou circunferência se $\begin{bmatrix} A = B \\ e \\ C = 0 \end{bmatrix}$
$C^2 - 4AB > 0$	Hipérbole
$C^2 - 4AB = 0$	Parábola

32 EQUAÇÕES

32.1 Expressão Geral

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

32.2 Raízes ou zeros de $\boldsymbol{F(x) = 0}$

Todo número α (real ou complexo) tal que $F(\alpha) = 0$, ou seja, os valores de x que anulam o polinômio $F(x)$.

32.3 Teorema Fundamental da Álgebra

"Toda equação polinomial de grau n $(n > 0)$, admite pelo menos uma raiz real ou complexa".
"Toda equação polinomial de grau $n > 0$ tem no campo complexo pelo menos uma raiz e no máximo n raízes"

32.4 Decomposição de uma Equação

Seja a equação de grau n:
$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ com $a_0 \neq 0$.

Se x_1, x_2, x_3,........,x_n são raízes dessa equação e a_0 o coeficiente do termo de maior grau a equação pode ser decomposta no produto: $F(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)$.

32.5 Relações de Girard

$ax^2 + bx + c = 0$	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$	$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$
$x_1x_2 = \frac{c}{a}$	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$
	$x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a}$

32.6 Raízes múltiplas

- **Definição:** Se $F(x) = (x - \alpha)^m.Q(x)$ onde (m é natural) e $Q(\alpha) \neq 0$, diremos que α é uma raiz de multiplicidade m da equação $F(x) = 0$.

  Observar que a decomposição fica:
  $F(x) = a_0(x - x_1)^{m_1}.(x - x_2)^{m_2} \ldots.(x - x_p)^{m_p}$

Com: $m_1 + m_2 + m_3 + \cdots . + m_p = n \ (grau\ da\ equação)$

- **Pesquisa de raízes múltiplas:**

Se α é uma raiz de multiplicidade m de $F(x) = 0$, então α será também raiz de $F'(x) = 0$ com multiplicidade $m - 1$. $F'(x)$ é a derivada de $F(x)$.

Ex: Na equação: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ as raízes $x_1 = 1;\quad x_2 = 1;\quad x_3 = 2$ ou seja 1 de multiplicidade dois.

$F'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = 0$ →raízes $x_1 = 1$ (multiplicidade um) e $x_2 = \frac{5}{3}$.

32.7 Raízes Racionais

Dada a equação algébrica:

$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots . + a_n = 0$, de COEFICIENTES INTEIROS, se o número racional $\frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^+$ e p e q primos entre si) for raiz de $F(x) = 0$ então: $\begin{cases} p \ \text{é}\ divisor\ de\ a_n \\ q \ \text{é}\ divisor\ de\ a_0 \end{cases}$

32.8 Raízes Irracionais

Se uma equação admite a raiz irracional $a + \sqrt{b}$, com multiplicidade m, admitirá também a raiz conjugada $a - \sqrt{b}$ com multiplicidade m.

Ex: compor a equação sabendo-se que 1 e $(-\sqrt{2})$ são raízes:

$x_1 = 1$
$x_2 = -\sqrt{2}$
$x_3 = +\sqrt{2}$
$F(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \Longrightarrow 0$
$F(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$

32.9 Raízes Reais

Teorema de BOLZANO

Seja uma equação polinomial $F(x) = 0$ de coeficientes reais, e a e b dois números reais tais que $(a < b)$:

- 1º Se $P(a) \times P(b) < 0$ ⟶ nº ímpar de raízes entre a e b.
- 2º Se $P(a) \times P(b) > 0$ ⟶ nº par de raízes entre a e b.

Consequências:

1ª Toda equação algébrica $F(x) = 0$ de coeficientes reais e grau ímpar, apresenta pelo menos uma raiz real de sinal contrário ao sinal de a_n.

2ª Se for de grau par teremos:

$a_n < 0$ ⟶ pelo menos duas raízes de sinais contrários.
$a_n < 0$ ⟶ um número par de raízes reais do mesmo sinal duas a duas.

Exemplo: Determinar m para que $x^3 - 2x^2 + 3x - m = 0$ tenha pelo menos uma raiz entre 0 e 1.
Resposta: $0 < m < 2$.

32.10 Raízes Complexas

Para toda equação algébrica de coeficientes reais só pode ter um número par de raízes complexas. Se $z = a + bi$ é raiz de multiplicidade m, então $z = a - bi$ será também raiz de multiplicidade m.